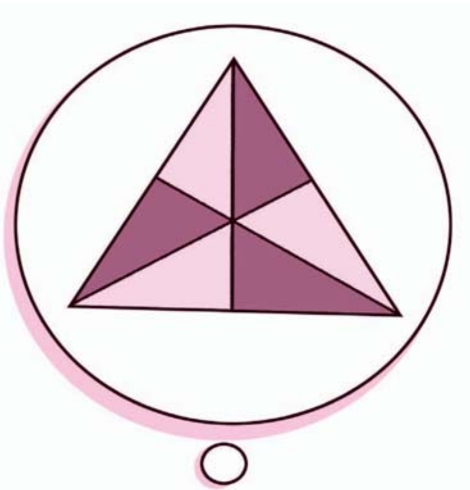
ترجمه و تألیف:
محمود محمدی



قضیه سِوا و کاربردهای آن

اشاره

جیو وانی سوا* (۱۷۳۴-۱۶۴۷) ریاضیدانی ایتالیایی بود که شهرتش را مدیون اثبات قضیهٔ سوا در هندسهٔ مقدماتی است. برادر وی، توماس سِوا نیز شاعر و ریاضیدانی برجسته بود.

سِوا در کالج یسوعی‌های میلان تحصیل کرد؛ سپس در دانشگاه پیزا به تحصیل ادامه داد تا سرانجام به درجهٔ استادی نائل شد. وی در ۱۶۸۶ به عنوان استاد ریاضی در دانشگاه مانتوا استخدام شد و باقی عمر خود را به کار در آنجا پرداخت. سِوا بیشتر سال‌های عمر خود را به تحصیل و تدریس هندسه گذراند.

در سال ۱۶۷۸، سوا قضیه‌ای مشهور در هندسه ترکیبی را که مربوط به مثلث بود به ثبت رساند که اکنون قضیهٔ سِوا نامیده می‌شود. این قضیه می‌گوید:

اگر $\overline{AD}$، $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$ سوائی‌های یک مثلث (پاره‌خط‌های وارد از یک رأس بر ضلع مقابل یا امتداد آن) باشند $\overline{AD}$، $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$ همرس خواهند بود اگر و تنها اگر:

$$\frac{AE}{EC}\times\frac{CD}{DB}\times\frac{BF}{FA}=۱$$

سِوا این قضیه را در کتاب De lines rectis منتشر کرد. وی نه تنها این قضیه را منتشر کرد بلکه قضیهٔ منلائوس را هم مجدداً کشف نمود و انتشار داد. وی همچنین کتاب "Opuscula Mathematic" را در سال ۱۶۸۲ و کتاب "Geometria Motus" را در سال ۱۶۹۲ نوشت. در کتاب اخیر وی حساب بی‌نهایت کوچک ها را پایه گذاری کرد.

در نهایت، سِوا در سال ۱۷۱۱ کتاب "De Re Nummeraria" را نوشت که از اولین آثار در حوزهٔ اقتصاد مبتنی بر ریاضیات به شمار می‌رود. جیو وانی سِوا همچنین کاربرد مکانیک و آمار را در سیستم‌های هندسی مطالعه نمود. در یک مورد وی به اشتباه عنوان نمود که نسبت تناوب نوسان دو پاندول معادل نسبت طول آن دو است اما بعداً این اشتباه را تصحیح کرد.

سِوا در زمینهٔ مکانیک سیالات نیز تجربیاتی داشت. در سال ۱۷۲۸ وی کتاب "opus hydrostaticum" را که حاصل مطالعات وی در مکانیک سیالات بود به رشته تحریر درآورد. در ادامه به شرح و اثبات قضیهٔ سِوا می‌پردازیم.

قضیهٔ سِوا (ceva's Theorem)

قبل از آن‌که به قضیه سِوا بپردازیم، ذکر یک تعریف و چند قرارداد را لازم می‌دانیم.

تعریف: سه خط یا سه پاره خط را همرس گویند اگر در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند.

قرارداد ۱. سوای یک مثلث پاره خطی است که یک سر آن منطبق بر یک رأس مثلث و سر دیگر آن روی ضلع متقابل به آن رأس (یا امتداد آن) باشد.

قرارداد ۲. خطی را که شامل نقاط A و B باشد با نماد $\overleftrightarrow{AB}$ نشان می‌دهند.

قرارداد ۳. به ازای هر دو نقطهٔ A و B، پاره خط $\overline{AB}$ یعنی اجتماع A و B، و تمام نقاط بین A و B. A.B را نقطه‌های انتهای $\overline{AB}$ می‌گویند.

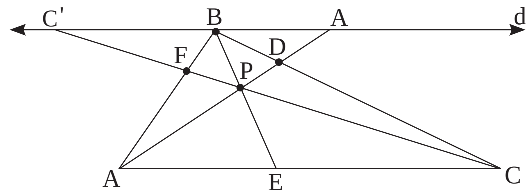
قرارداد ۴. عدد AB را طول پاره‌خط $\overline{AB}$ می‌گویند.

قرارداد ۵. نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$، اجتماع $\overline{AB}$ و مجموعهٔ نقطه‌های C است که A–B–C، (یعنی نقطهٔ B بین نقطه‌های A و C می‌باشد.) نقطه A را ابتدای $\overrightarrow{AB}$ می‌گویند.

قضیهٔ سِوا: فرض کنیم $\overline{AD}$، $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$ سِوائی‌های یک مثلث باشند. (شکل زیر را ببینید) آن‌ها همرس می‌باشند اگر و فقط اگر:

$$\frac{AE}{EC}\times\frac{CD}{DB}\times\frac{BF}{FA}=۱$$

اثبات: فرض کنیم $\overline{AD}$، $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$ در نقطهٔ P همرس باشند. خط d را از نقطهٔ B به موازات $\overline{AC}$ رسم می‌کنیم. فرض کنیم $C'=\overline{CF}\cap d$ و $A'=\overline{AD}\cap d$.



مثلث‌های ACD و A′BD متشابه‌اند، زیرا دو زاویه از یکی قابل انطباق بر دو زاویه از دیگری است. بنابراین:

$$\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{BA'} \qquad (\text{۱})$$

دو مثلث ACF و BC′F نیز به دلیل همانند مشابه‌اند:

$$\frac{BF}{FA}=\frac{BC'}{CA} \qquad (\text{۲})$$

از ضرب طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{CD}{DB}\times\frac{BF}{FA}=\frac{AC}{BA'}\times\frac{BC'}{CA}=\frac{BC'}{BA'} \qquad (\text{۳})$$

به عـلاوه $\Delta AEP\sim\Delta A'BP$ و $\Delta CEP\sim\Delta C'BP$ و رابطهٔ زیر را می‌توان نوشت:

$$\frac{A'B}{AE}=\frac{BP}{EP}=\frac{BC'}{EC} \qquad (\text{۴})$$

در نتیجه:

$$\frac{AE}{EC}=\frac{A'B}{BC'}$$

با توجه به عبارت‌های (۳) و (۴) داریم:

$$\frac{AE}{EC}\times\frac{CD}{DB}\times\frac{BF}{FA}=\frac{A'B}{BC'}\times\frac{BC'}{A'B}=\text{۱}$$

برعکس، فرض کنیم نقاط E، D و F روی ΔABC باشند به طوری‌که A–F–B (یعنی F بین نقاط A و B است)، B–D–C و C–E–A و $\frac{AE}{EC}\times\frac{CD}{DB}\times\frac{BF}{FA}=\text{۱}$

فرض کنیم x نقطهٔ تلاقی $\overline{AD}$ و $\overline{BE}$ و F′. نقطهٔ تلاقی $\overrightarrow{CX}$ و $\overline{AB}$ باشـد. با توجه به اولین قسـمت برهان

$$\frac{AE}{EC}\times\frac{CD}{DB}\times\frac{BF'}{F'A}=\text{۱}$$

در نتیجه: $\frac{BF'}{F'A}=\frac{BF}{FA}$، که از آن نتیجه می‌شود: $F'=F$ بنابراین $\overline{AD}$، $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$ همرسند.

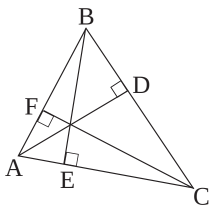
قضیهٔ سِوا برای همرس بودن تمام ارتفاع‌ها، یا تمام میانه‌ها، یا تمام نیمسازها در هر مثلث می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

نتیجه. در مثلث ABC، سـه میانه همرسـند، سه‌نیمساز همرسند و ارتفاع‌ها نیز همرس می‌باشند.

در اینجا تنها اثبات همرس بودن سه ارتفاع را بیان می‌کنیم و اثبات بقیه را به عنوان تمرین برای شما می‌گذاریم.

در مورد مثلث قائم الزاویه قضیه واضح است، زیرا ارتفاع‌های مثلث قائم الزاویه به خودی خود در رأس زاویهٔ قائمه هم دیگر را قطع می‌کنند پس همرس می‌باشند.

حال فـرض می‌کنیـم ΔABC دارای زوایـای حاده باشـد. بنابراین ارتفاع‌ها داخل مثلث قرار دارند (نقاط انتهای هر ارتفاع روی مثلث اسـت) (شـکل زیر) اگـر $\overline{AD}$، $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$ ارتفاع‌های مثلث باشند.



مثلث‌های قائم الزاویهٔ ACD و BCE متشـابه‌اند (به حالت قابل انطباق بودن یک زاویه حاده) در نتیجه:

$$\frac{CD}{EC}=\frac{DA}{EB}$$

به‌طور مشابه $\Delta CAF\sim\Delta BAE$ و $\Delta ABD\sim\Delta CBF$، بنابراین:

$$\frac{BF}{DB}=\frac{FC}{DA},\ \frac{AE}{FA}=\frac{EB}{FC}$$

باید نشـان دهیـم: $\frac{AE}{EC}\times\frac{CD}{DB}\times\frac{BF}{FA}=\text{۱}$، طرف چپ این تساوی را به شکل مناسب زیر می‌نویسیم تا بتوانیم از رابطه‌های به دست آمده استفاده کرده و حکم را ثابت کنیم.

$$\frac{AE}{EC}\times\frac{CD}{DB}\times\frac{BF}{FA}=\frac{AE}{FA}\times\frac{CD}{EC}\times\frac{BF'}{DB}$$

$$=\frac{EB}{FC}\times\frac{DA}{EB}\times\frac{FC}{DA}=\text{۱}$$ با توجه به رابطه‌های به‌دست آمده

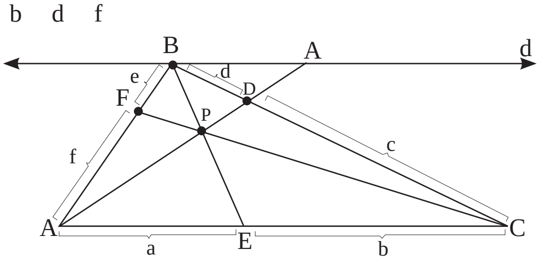
و بنا به قضیهٔ سِوا، ارتفاع‌های مثلث همرسند.

برهان در مورد مثلث منفرجه را به عهدهٔ شما می‌گذاریم.

نقاط همرسی ارتفاع‌ها، میانه‌ها و نیمسازهای زوایای مثلث را به ترتیب مرکز ارتفاع‌هـا (orthocenter)، مرکز ثقل و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث می‌گویند.

طریقه به‌خاطر سپردن رابطه قضیهٔ سِوا

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$



مسئله. فرض کنید A_1، B_1 و C_1 به ترتیب نقاطی منتخب روی اضلاع $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ و $\overline{AB}$ از ΔABC و پاره‌خط‌های $\overline{AA_1}$، $\overline{BB_1}$ و $\overline{CC_1}$ در نقطهٔ o همرس باشند.

الف. ثابت کنید:

$$\frac{\text{مساحت}\ (\Delta AOB)}{\text{مساحت}\ (\Delta BOC)}=\frac{AB_1}{B_1C}$$

ب. ثابت کنید:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\times\frac{BA_1}{A_1C}\times\frac{CB_1}{B_1A}=\text{۱} \qquad (\text{قضیهٔ سِوا})$$

پی‌نوشت:

* Giovanni Ceva
1. Jesuit college
2.University of Pisa
3. University of Mantova
4.Synthetic geo metry
5. Menelaus,s Theorem
6. Infinitesimal Calculus

منبع:

ترجمه از کتاب
Methods For Euclidean Geometry
Owen Byer Felix Lazebnik Deirdrel.Smeltzer