آموزشی

محمود نصیری

حد تابع

(با استفاده از دنباله)

مطابق با کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (جدیدالتألیف)

اشاره

در این مقاله قصد داریم مفهوم حد توابع را از طریق حد و دنباله‌ها بررسی کنیم. بنابراین فرض می‌گیریم با دنباله و حد آشنایی دارید.

روش ما در این کار این است که «حد تابع‌ها» را به «حد دنباله‌ها» تبدیل کنیم. این عمل به وسیلهٔ دنباله‌ای صورت می‌گیرد که از ترکیب تابع مورد نظر با دنبالهٔ مناسبی به دست می‌آید. پس پرسش اساسی در این بحث این است که:

تابع f مفروض است، اگر x تقریبی از a باشد مقادیر $f(x)$ تقریبی از چه عددی (در صورت وجود) خواهند بود؟

این پرسش را ابتدا از طریق چند مثال بررسی می‌کنیم.

مثال ۱. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$ مفروض است. اگر x تقریبی از ۲ باشد، $f(x)$ تقریبی از چه عددی (در صورت وجود) خواهد بود؟

این مسئله را، به وسیلهٔ انتخاب یک دنباله که حد آن ۲ باشد و ترکیب آن با تابع f، به مسئله‌ای مربوط به دنباله‌ها تبدیل می‌کنیم.

دنبالهٔ $x_n=2+\frac{1}{n}$ هر تقریبی از ۲ است. زیرا این دنباله همگرا به ۲ است.

$$f(x_n)=\frac{2+\frac{1}{n}+1}{(2+\frac{1}{n})^2+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\frac{2+\frac{1}{n}+1}{5+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n}}$$

اکنون بنابر قضیه‌های همگرایی دنباله‌ها، $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\frac{3}{5}$. اگر به جای این دنباله خاص هر دنبالهٔ دیگری مانند $x_n=2+a_n$ را انتخاب کنیم، که در آن $a_n\neq 0$ و $a_n\to 0$ آن‌گاه x_n نیز هر تقریبی از ۲ را به‌دست می‌دهد.

$$f(x_n)=\frac{2+a_n+1}{(2+a_n)^2+1}=\frac{a_n+3}{a_n^2+4a_n+5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n+3}{a_n^2+4a_n+5}$$

$$=\frac{0+3}{0+0+5}=\frac{3}{5}$$

اگر x تقریبی از ۲ باشد، پس $f(x)$ تقریبی از $\frac{3}{5}$ است.

مثال ۲. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^3-x}{x-1}$ و با دامنه $\mathbb{R}-\{1\}$ مفروض است. اگر x تقریبی از ۱ باشد $f(x)$ تقریبی از چه عددی است؟ واضح است که تابع در $x=1$ تعریف نشده است.

می‌دانیم دنبالهٔ $x_n=۱+\frac{(-۱)^n}{n}$ همگرا به $a=۱$ است و در نتیجــه تقریبات دلخواه بــرای $a=۱$ را ایجاد می‌کند. اکنــون این پرســش را به کمک ترکیب تابــع f با دنبالهٔ x_n به پرسشــی در مورد دنباله‌ها تبدیل می‌کنیم. یعنی دنبالهٔ $f(x_n)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$f(x_n)=\frac{x_n^۳-x_n}{x_n-۱}=\frac{x_n(x_n-۱)(x_n+۱)}{x_n-۱}$$

$x_n\neq ۱$ چرا؟ پس،

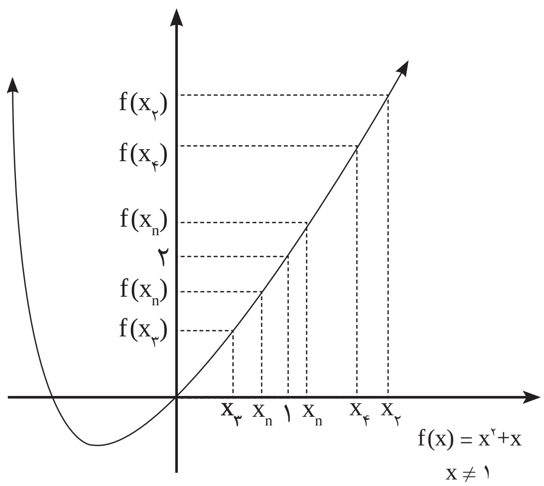
$$f(x_n)=x_n(x_n+۱)=(۱+\frac{(-۱)^n}{n})(۱+\frac{(-۱)^n}{n}+۱)$$

اکنون به کمک قضایای همگرایی دنباله‌ها داریم؛

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=(۱+۰)(۲+۰)=۲$$

اگر به جای دنبالــهٔ، خاص $x_n=۱+\frac{(-۱)^n}{n}$ هر دنبالهٔ دلخــواه x_n را اختیار کنیم که بــه ازای هر n، $x_n\neq ۱$ و x_n همگرا به ۱ باشــد، مشــاهده می‌کنیم که، $f(x_n)$ همگرا به ۲ اســت. می‌توانیم فــرض کنیم، $x_n=۱+a_n$ که $a_n\neq ۰$ دنباله‌ای همگرا به صفر است. مانند، $a_n=\frac{(-۱)^n}{n}$.

$$f(x_n)=\frac{(۱+a_n)^۳-(۱+a_n)}{۱+a_n-۱}=\frac{a_n^۳+۳a_n^۲+۲a_n}{a_n}$$



چــون $a_n\neq ۰$ پس $f(x_n)=a_n^۲+۳a_n+۲$ ســپس، بنابر قضیه‌های همگرایــی دنباله‌ها، چون a_n همگرا به صفر است پس $f(x_n)$ همگرا به ۲ است. بنابراین $f(x)$ تقریبی از ۲ است، وقتی x تقریبی از ۱ باشد.

در این روش، مهم آن اســت که بفهمیم چگونه از روند ترکیب تابع و دنباله، مسئله، تقریب یا نزدیکی $f(x)$ را به یک عدد، به مسئله همگرایی یک دنباله تبدیل می‌کنیم.

برای آن‌که به یک تعریف رسمی برسیم، باز هم مثال‌ها را ادامه می‌دهیم. توجه داشته باشید که هریک از این مثال‌ها نماینده تابع‌های خاصی هستند.

در مثال (۱) تابع f در $x=۲$ تعریف شــده است اما در مثــال (۲) تابع f در $x=۱$ تعریف نشــده اســت. اکنون دو مثال از دو نوع متفاوت دیگر را مطرح کرده و سپس تعریف را بیان می‌کنیم.

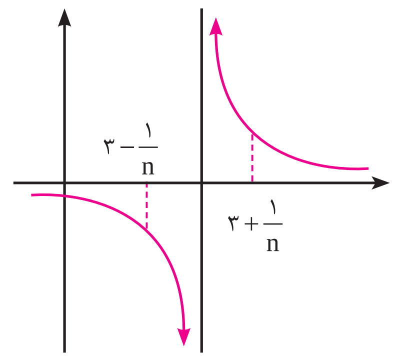
مثــال ۳. $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ مفــروض اســت. $f(x)$ به چه عددی (در صورت وجود) نزدیک می‌شــود به شــرطی که x به ۳ نزدیک شــود یا $f(x)$ تقریبی از چه عددی (در صورت وجود) می‌باشد به شرطی که x تقریبی از ۳ باشد؟

فــرض کنیم $x_n=۳+a_n$ کــه $a_n\neq ۰$ و $a_n\to ۰$ در این صورت؛

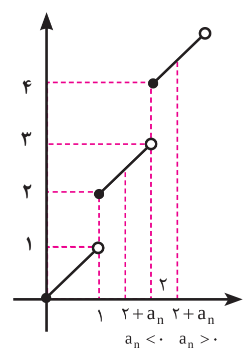
$$f(x_n)=\frac{۱}{۳+a_n-۳}=\frac{۱}{a_n}$$

اکنون وقتی $a_n \to ۰$ و $a_n \neq ۰$، دنبالهٔ $f(x_n)$ واگرا است. پس وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود، f(x) به هیچ عددی نزدیک نمی‌شود، به عبارت دیگر وقتی x تقریبی از ۳ است، f(x) تقریبی از هیچ عددی نخواهد بود.

اگر $a_n = \frac{۱}{n}$ یا $a_n = -\frac{۱}{n}$ را اختیار کنید، در حالت اول $f(x_n)=n$ و واگرا به $+\infty$ است و در حالت دوم $f(x_n)=-n$ و واگرا به $-\infty$ است. بنابراین درست آن است که بگوییم $f(x_n)$ واگرا است. توجه داشته باشید که در این‌گونه موارد درست نیست که بگوییم $f(x_n)$ واگرا به $+\infty$ یا واگرا به $-\infty$ است.



مثال ۴. تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\lfloor x\rfloor$ را در نظر می‌گیریم. مقادیر f(x) تقریبی از چه عددی است یا f(x) به چه عددی نزدیک می‌شود، هرگاه x به ۲ نزدیک می‌شود، یا x تقریبی از ۲ باشد؟



فرض کنید $x_n = ۲+a_n$ که $a_n \neq ۰$ و $a_n \to ۰$ در این صورت برای ترکیب، $f(x_n)=۲+a_n+\lfloor ۲+a_n\rfloor$ دو حالت وجود دارد. اگر $a_n>۰$ و همگرا به صفر باشد آن‌گاه $f(x_n)\to ۲+۲=۴$. و اگر $a_n<۰$، و همگرا به صفر باشد آن‌گاه، $f(x_n)\to ۲+۱=۳$.

پس در حالت کلی دنبالهٔ $f(x_n)$ همگرا نیست. یعنی وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود یا x تقریبی از ۲ است، f(x) تقریبی از هیچ عددی نمی‌تواند باشد. اما این مسئله با مسایل قبلی متفاوت است. می‌توانیم بگوییم f(x) به ۴ نزدیک می‌شود یا f(x) تقریبی از ۴ است به شرطی که $a_n>۰$، یعنی x_n با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود یا x به ازای مقادیر بزرگ‌تر از ۲، تقریبی از ۲ باشد.

به همین ترتیب f(x) به ۳ نزدیک می‌شود یا تقریبی از ۳ است، هرگاه $a_n<۰$، یعنی x_n با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود. یا x به ازای مقادیر کم‌تر از ۲، تقریبی از ۲ باشد.

نتیجه‌گیری و تعریف

مسایل قبلی نه تنها روندی را نشان می‌دهند که چگونه مسایل تقریبی یا نزدیک شدن تابع‌ها را به یک عدد به مسایل همگرایی دنباله‌ها انتقال می‌دهیم، بلکه دو پرسش اساسی دیگر در مورد حد را دربرمی‌گیرند که آن‌ها را در زیر بیان می‌کنیم.

۱. تابع $f:D\to R$ مفروض است، و a عددی حقیقی است. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در D و همگرا به a باشد، تحت چه شرایطی $\{f(x_n)\}$ همگرا به L است.

۲. تابع $f:D\to R$ مفروض است. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در D و همگرا به a باشد، اگر بدانیم $\{f(x_n)\}$ به نقاطی همگرا است، چگونه این نقاط را تعیین می‌کنیم.

در اکثر موارد پاسخ به پرسش‌های بالا را می‌توان بلافاصله از مبحث دنباله‌ها نتیجه‌گیری کرد، به ویژه از تعریف همگرایی دنباله‌ها به تعریف حد تابع‌ها می‌رسیم. از تمام مثال‌های فوق وقتی $\{f(x_n)\}$ همگرا به L است، به شرطی که $\{x_n\}$ همگرا به a باشد، می‌خواهیم تحت شرایطی به تعریف حد برسیم f(x) وقتی x به سمت a میل می‌کند.

$f:D\to R$ مفروض است که، ($D\subseteq R$) فرض کنیم a عددی حقیقی باشد که دنباله‌ای غیرثابت از اعضای D مانند $\{x_n\}$ همگرا به آن باشد. (لزومی ندارد a متعلق به D باشد.)

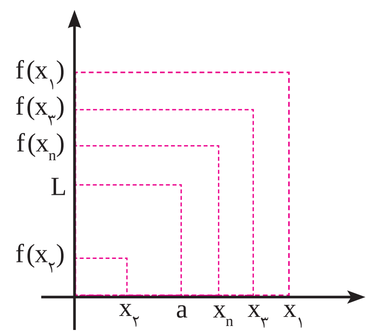
چون به ازای هر n طبیعی، $x_n \in D$ و $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$، آن‌گاه f(x) به ازای هر n طبیعی تعریف می‌شود، ممکن است دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ همگرا باشد یا نباشد. اگر همگرا باشد، دنبالهٔ غیرثابت دیگری مانند $\{x'_n\}$ از D انتخاب می‌کنیم که همگرا به a باشد.

اکنون $\{f(x'_n)\}$ را در نظر می‌گیریم. ممکن است این دنباله همگرا باشد یا نباشد. اگر همگرا باشد ممکن است به همان عددی که $\{f(x_n)\}$ همگرا است، این نیز همگرا باشد یا ممکن است به عدد دیگری همگرا باشد. اگر $\{f(x'_n)\}$ همگرا به همان عددی باشد که $\{f(x_n)\}$ همگرا است آن‌گاه دنبالهٔ غیرثابت دیگری مانند $\{x''_n\}$ از D که همگرا به a باشد انتخاب می‌کنیم، سپس $\{f(x''_n)\}$ را در نظر می‌گیریم و این عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

اگر به ازای تمام دنباله‌های ممکن از D که همگرا به a باشند، $\{f(x_n)\}$ همگرا به عدد L باشد، گوئیم حد f(x) وقتی x به a میل می‌کند برابر L است و چنین می‌نویسیم، $\lim_{x\to a} f(x)=L$.

ممکن است دنباله‌های x_n، همگی بزرگ‌تر از a یا کم‌تر از a یا حتی به تعداد نامتناهی جمله کم‌تر یا بیش‌تر از a باشند.

اکنون با توجه به مسایل و مقدمات فوق تعریف دقیقی از حد تابع ارایه خواهیم داد.



تعریف. تابع $f:D\to R$ و $D\subseteq R$ مفروض است. فرض کنیم a عددی حقیقی باشد که تابع f در بازه (a,b) یا (c,a) یا هر دو تعریف شده باشد، گوئیم، $\lim_{x\to a} f(x)=L$؛

هرگاه به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ از دامنه f، که $\{x_n\}$ همگرا به a و $x_n\neq a$، داشته باشیم، $\lim_{x\to a} f(x)=L$.

مثال ۵. آیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ که $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x-2}{x-1} & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ وجود دارد؟

فرض کنیم $x_n=1+a_n$ که $a_n\to 0$، $a_n\neq 0$ پس $x_n\neq 1$ در نتیجه،

$$f(x_n)=\frac{(1+a_n)^3+(1+a_n)-2}{1+a_n-1}$$
$$=\frac{1+a_n^3+3a_n^2+3a_n+1+a_n-1}{a_n}$$
$$=a_n^2+3a_n+4$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}(a_n^2+3a_n+4)=4$$

زیرا $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$

چون $a_n\neq 0$ دلخواه است پس $\lim_{x\to 1} f(x)=4$.

می‌توانستیم با شرط $x\neq 1$ ضابطهٔ تابع را ساده‌تر کنیم.

$$\frac{x^3+x-2}{x-1}=\frac{(x^3-1)+x-1}{x-1}$$
$$=x^2+x+1+1=x^2+x+2$$

بنابراین؛

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x+2 & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$$

اکنون اگر $x_n\neq 1$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۱ باشد،

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty} x_n^2+x_n+2$$
$$=1+1+2=4$$

چون $x_n\neq 1$ دلخواه است، پس $\lim_{x\to 1} f(x)=4$.

توجه داشته باشید که، $f(1)=2\neq 4$. در تعریف حد تابع f در نقطهٔ a، دنبالهٔ $\{x_n\}$ متمایز از خود a در نظر گرفته می‌شود، زیرا مسئلهٔ حد تابع، رفتار مقادیر f(x) به ازای $x\neq a$ است.

مثال ۶. تابع $f:R-\{0\}\to R$ با ضابطهٔ $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ مفروض است، حد تابع را وقتی $x\to 0$ محاسبه کنید.

چون $D_f=R-\{0\}$ پس حداقل دنباله‌ای مخالف صفر در دامنه f وجود دارد که همگرا به صفر باشد.

فرض کنیم $x_n\neq 0$ دنباله‌ای دلخواه همگرا به صفر باشد.

چون به ازای هر n، $x_n\neq 0$ پس، $f(x_n)$ تعریف می‌شود.

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty} x_n\sin\frac{1}{x_n}=0$$

زیرا $\sin\frac{1}{x_n}$ کراندار و $x\to 0$، پس بنابر قضیهٔ کرانداری و حد صفر در دنباله‌ها، $f(x_n)$ همگرا به صفر است. چون $x_n\neq 0$ دنبالهٔ دلخواهی در دامنه f است، پس $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ یا $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

اکنون که با تعریف حد تابع به روش حد دنباله‌ها آشنا شده‌اید چون این تعریف در کتاب‌های کم‌تری وجود دارد، لازم است دربارهٔ آن بحث بیش‌تری صورت گیرد تا این تعریف واضح‌تر شود. بنابراین چند نکتهٔ اساسی را قبل از بیان قضایا بررسی می‌کنیم.

اساس تعریف بیان شده بر «نقطهٔ حدی» است. اما چون بیان نقطه حدی در دبیرستان کمی پیچیده است از صورت معادلی برای آن استفاده کردیم که توضیح خواهیم داد. اجازه دهید ابتدا فقط برای آشنایی مختصری دربارهٔ نقطه حدی مطالبی را بیان کنیم.

نقطه حدی[1]

مفهوم همسایگی و همسایگی محذوف به شکل زیر تعریف می‌شوند.

همسایگی متقارن a:

$$N_\delta(a)=\left\{x\in\mathbb{R}:|x-a|<\delta\right\}=\left(a-\delta,a+\delta\right)$$

همسایگی متقارن محذوف a:

$$N'_\delta(a)=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-a|<\delta\right\}-\{a\}$$
$$=\left(a-\delta,a+\delta\right)-\{a\}=\left(a-\delta,a\right)\cup\left(a,a+\delta\right)$$

تعریف. فرض می‌کنیم S زیر مجموعه‌ای از R باشد. $a\in R$ را یک نقطهٔ حدی S می‌نامیم هرگاه هر همسایگی محذوف a مانند $N'_\delta(a)$ شامل نقطه‌ای از S باشد.

مثلاً اگر $S=(0,1)$ آن‌گاه هر عدد حقیقی $a\in[0,1]$ یک نقطهٔ حدی S است. به طور کلی، هر نقطهٔ بازهٔ [a,b] یک نقطهٔ حدی بازهٔ (a,b) است.

مثال. تنها نقطهٔ حدی مجموعهٔ زیر $a=0$ است.

اگر $S=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\right\}=\left\{\frac{1}{n}|n\in N\right\}$ آن‌گاه $a=0$ تنها نقطهٔ حدی S است.

تذکر. لزومی ندارد نقطهٔ حدی یک مجموعه عضو آن مجموعه باشد.

هر عدد حقیقی $a\in[0,1]$ یک نقطه حدی $S=\left\{x\in Q\,|\,0<x<1\right\}$ است، زیرا بین هر دو عدد حقیقی عددی گویا وجود دارد. پس برای هر $a\in[0,1]$ هر همسایگی محذوف a شامل نقطه‌ای از S است.

اگر a یک نقطهٔ حدی S باشد برای هر $n\in N$، عدد $x_n\in S$ وجود دارد که متعلق به یک همسایگی a و شعاع $\frac{1}{n}$ است، یعنی $0<|x_n-a|<\frac{1}{n}$ و داریم:

$$x_n\in S-\{a\},\ \lim_{n\to+\infty}x_n=a$$

به عکس اگر دنباله $x_n\in S-\{a\}$ وجود داشته باشد که $x_n\to a$، آن‌گاه نامتناهی از عضوهای S در یک همسایگی‌های محذوف a واقع‌اند، بنابراین، عضوی از S وجود دارد که در هر همسایگی محذوف a و به شعاع δ واقع‌اند. بنابراین شرطی معادل برای نقطهٔ حدی به دست می‌آید.

قضیه. فرض کنیم $S\subseteq R$، عدد $a\in R$، یک نقطه حدی S است، اگر و فقط اگر، یک دنبالهٔ $\{x_n\}$ از $S-\{a\}$ وجود داشته باشد که، $\{x_n\}$ همگرا به a باشد.

معمولاً در اکثر کتاب‌ها تعریف حد به صورت زیر است.

تعریف: تابع $f:D\to R$ مفروض است فرض کنیم a یک نقطه حدی D باشد، در این صورت $\lim_{x\to a}f(x)=L$ هرگاه به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ از دامنه f که همگرا به a باشد و $x_n\neq a$ دنباله $\{f(x_n)\}$ همگرا به L است.

چون بحث از نقطه حدی چندان ساده نیست، در کتاب‌های زیادی روش دوم را انتخاب می‌کنند که ساده‌تر است. یعنی صورت معادل آن را انتخاب می‌کنند که بسیار ساده است و حتی در دبیرستان قابل تعریف است. به جای بیان نقطه حدی وجود دنباله‌ای از دامنه f، همگرا به a را بیان می‌کنند. این تعریف بسیار ساده و روشن به صورت زیر است.

تعریف. تابع $f:D\to R$ و $D\subseteq R$ مفروض است. فرض کنیم a عددی حقیقی باشد. دنباله‌ای از دامنهٔ f مانند $\{a_n\}$ وجود دارد که $a_n\neq a$ و $\{a_n\}$ همگرا به a باشد. گوییم $\lim_{x\to a}f(x)=L$ هرگاه به ازای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ از دامنهٔ f، که $\{x_n\}$ همگرا به a و $x_n\neq a$ داشته باشیم $\lim_{x\to a}f(x)=L$.

اما این تعریف با تعریفی که برای حد در کتاب بیان شده است کمی متفاوت است. در آن‌جا بیان شده است که تابع در بازهٔ (a,b) یا (c,a) یا هر دو تعریف شده باشد، اما در این‌جا بیان کرده‌ایم که باید حداقل دنباله‌ای از دامنهٔ f همگرا به a و مخالف a موجود باشد. بدون این شرایط، تعریف دچار مشکل خواهد شد. مثلاً اگر شرط تعریف شدن در یک همسایگی، یا شرط وجود دنباله‌ای از دامنه f، همگرا به a، و مخالف a ذکر نشود آن‌گاه تابع $y=\sqrt{-|x|}$ در $x=0$ یا $y=\sqrt{x}$ در $x=-1$ طبق تعریف حد خواهند داشت.

پس برای جلوگیری از این بحث‌ها، در تعریف حد این شرایط را بیان می‌کنند. اما به دلیل هماهنگی تعریف حد با تعریف حد در حسابان از مفهوم همسایگی استفاده کرده‌ایم. زیرا اگر از مفهوم نقطهٔ حدی، یا همان وجود دنباله‌ای در دامنه، استفاده کنیم این تعریف کلی‌تر خواهد بود. مثلاً با تعریف حد به کمک همسایگی یا همان بازه‌های (a,b) یا (c,a) تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}}$ که با شرط $x\neq\frac{1}{k}, x\neq 0$ برابر تابع $f(x)=1$ است و در $x=0$ حد آن تعریف نمی‌شود، زیرا هیچ یک از بازه‌های $(0,\delta)$ یا $(-\delta,0)$ در دامنه تابع قرار نمی‌گیرند. هر کدام از این بازه‌ها شامل بی‌شمار نقاط $x=\frac{1}{k}$ هستند که تابع در آن تعریف نمی‌شود. پس $\lim_{x\to 0}f(x)$ در چارچوب کتاب حسابان تعریف نخواهد شد. در صورتی که با تعریف دوم این تابع در $x=0$

دارای حد اســت، زیرا $x=0$ یک نقطه حدی دامنه است و دنبالــه‌ای مانند a_n از دامنــهٔ f مانند $a_n=\frac{\sqrt{2}}{n}$ وجود دارد که همگــرا به صفر و مخالف صفر اســت. زیرا $f(a_n)$ تعریف شده است و به ازای هر دنبالهٔ $x_n \in D_f$ ، $x_n \to 0$ و $x_n \neq 0$ ، $f(x_n)=1$ و همگــرا بــه ۱ اســت. پــس $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

بنابراین، وقتی حد تابع‌ها به کمک دنباله‌ها بیان می‌شود در اســاس تعریف دوم مطرح می‌شود. اما در کتاب درسی به دلیل هماهنگی با تعریف حســابان از همان تعریف، به کمک همسایگی یا تعریف شدن حداقل در تمام نقاط یک همسایگی راست یا چپ a استفاده کرده‌ایم. و سعی می‌کنیم از مثال‌های مشــابه فوق پرهیز کنیم. البته تعریف دوم از حد برای توابع $f: D \to \mathbb{R}$ ، که D شامل یک همسایگی چپ یا راست نقطه a باشد، معادل همان تعریف حد در کتاب حسابان است.

اکنون می‌گوییم هر آن‌چه که در این قسمت بیان کردیم، یک بررسی دقیق از ارائهٔ تعریف حد است. اما از این‌جا به بعد به این نکته توجه داشته باشید که ملاک همان تعریف کتاب درســی است و برای وجود حد در یک نقطهٔ a، تعریف شدن در حداقل یک همسایگی محذوف راست یا چپ a لازم است. در غیر این صورت بحثی از حد تابع در a نداریم.

نکته‌های مهمی در مورد تعریف

۱. از تعریف حد چنین برمی‌آید که لازم نیســت تابع در نقطه $x=a$ تعریف شود.

اگر تابع در $x=a$ تعریف شــود، لزومی ندارد حد تابع برابر $f(a)$ باشد. $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

$\lim_{x\to 1} f(x)=2\neq f(1)=0$

۲. وقتــی $x_n \to a$ ، نبایــد هیچ کــدام از جمله‌های x_n از مرتبــه‌ای به بعد برابر a باشــند، زیرا ممکن اســت تابع در a تعریف نشــده باشــد که در این صورت x_nها در دامنهٔ تابع نیستند. اگر تعداد متناهی جمله x_n برابر a باشد اشکالی ندارد.

حتی ممکن است تابع در $x=a$ تعریف شود اما مفهوم حــد f در a ارتباطی بــا $f(a)$ ندارد. به همین دلیل شــرط $x_n \neq a$ لازم است.

۳. $f(x_n)$ باید به ازای تمام دنباله‌های $x_n \neq a$ که همگرا به a در دامنهٔ تابع هســتند، حد L داشــته باشد نه به ازای بعضی دنباله‌هایی که همگرا به a باشند.

۴. در تعریفی از حد که بیان کردیم، شــرط اول بحث از حد در یک نقطهٔ a، آن اســت که تابــع حداقل در یک بازهٔ (a,b) یا (c,a) تعریف شــود. در غیر این صورت بحثی از حد تابع در a نداریم.

در تابــع با ضابطه $f(x)=\sqrt{-|x|}$ داریم، $D_f=\{0\}$ و ۰ نقطه منفرد تابع اســت. تابــع در هیچ بازهٔ $(0,b)$ یا $(c,0)$ تعریف نشــده و بحث از حد در $x=0$ نداریم. توجه داشــته باشــید که اگر در تعریف، شرط وجود دنباله همگرا به صفر در دامنــهٔ تابع را بیــان نمی‌کردیم این تابع در $x=0$ دارای حد می‌شد، چرا؟

۵. اگر $S \subseteq R$ غیرتهی باشد و $a \in S$ آن‌گاه یا دنباله‌ای مانــد $\{a_n\}$ از اعضــای S وجود دارد که همگرا به a باشــد یــا هیچ دنباله $\{a_n\}$ که $a_n \neq a$ وجود نــدارد که همگرا به a باشــد، که در حالت اول a همان نقطهٔ حدی اســت و در حالــت دوم a را نقطهٔ منفرد S می‌نامیــم. بنابراین a نقطهٔ منفرد S است، هرگاه یک همسایگی محذوف a وجود داشته باشــد که شامل هیچ نقطه‌ای از S نباشــد، یعنی در تابع با ضابطــهٔ $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$ ، $D_f=\{0\}\cup[1,+\infty)$. چرا؟ $x=0$ نقطه منفرد دامنه تابع است، زیرا همسایگی محذوف $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})-\{0\}$ از صفر وجود دارد که شــامل هیچ نقطه‌ای از D_f نمی‌باشــد و هیچ دنبالــه‌ای غیرثابت در دامنهٔ f وجود ندارد که همگرا به صفر باشد. بنابراین بحث از حد، در $x=0$ نداریم.

۶. در کتاب حســابان سال ســوم تعریفی از حد به طور غیررســمی بیان شده اســت، که $\lim_{x\to a} f(x)=L$. این به آن معناست که $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه می‌توانیم به L نزدیک کنیم، به شرطی که x به اندازهٔ کافی به a نزدیک باشد. $f(x)$ را بــه هر اندازه دلخواه به L نزدیک کنیم یعنی، به ازای هر $\varepsilon>0$ اگر x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم داریم $|f(x)-L|<\varepsilon$ ، یعنی اگر $0<|x-a|<\delta$ داشــته باشیم $|f(x)-L|<\varepsilon$ ، $\delta>0$ معمولاً وابســته به ε وجود داشــته باشد، در نتیجه تعریفی به صورت زیر مطرح است؛

تعریف حد به روش ε و δ

فــرض کنیم تابع f در یک بــازهٔ (a,b) یا (c,a) یا هر دو تعریف شــده باشد. گوئیم $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ، هرگاه $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بتوانیم به L نزدیک کنیم به شــرطی که x را به اندازهٔ کافی به a نزدیک کرده باشــیم. یعنی به ازای هر $\varepsilon>0$ عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد، که اگر $0<|x-a|<\delta$ داشته باشیم $|f(x)-L|<\varepsilon$.

پی‌نوشت:

1. (Limit point) Accumulation Point

منبع:

حساب دیفرانسیل و انتگرال جلد اول، محمود نصیری، انتشارات مبتکران، ۱۳۹۱.