ضرب دکارتی
خواص و کاربردهای آن

حمیدرضا امیری

اشاره

در بین اعمال بین دو مجموعه[1]، همچون اجتماع[2]، اشتراک[3]، تفاضل[4]، تفاضل متقارن[5] و ضرب دکارتی[6] عمل آخر، یعنی ضرب دکارتی، با چهار عمل قبل بسیار متفاوت است. اگر A و B دو مجموعه باشند، آن‌گاه $(A\cup B)$، $(A\cap B)$، $(A-B)$ و $(A\Delta B)$ هر کدام مجموعه‌هایی از جنس دو مجموعهٔ A و B هستند و قابل مقایسه با این دو مجموعه. به عنوان مثال می‌دانیم $A\subseteq(A\cup B)$، $(A\cap B)\subseteq A$، $(A-B)\subseteq A$ ولی نمی‌توانیم $(A\times B)$ را با A یا B مقایسه کنیم و البته نوع اعضای مجموعهٔ $(A\times B)$ با اعضای A و B متفاوت است. در این مقاله سعی می‌کنیم پس از تعاریف مقدماتی و قضیه‌های[7] مربوطه، به خواص این عمل پرداخته و کاربردهای این عمل را بررسی کرده و سپس آن را به مجموعه‌هایی با بُعد بالاتر (که در کتاب درسی جبر و احتمال نیز به آن اشاره‌ای شده است) تعمیم دهیم.

***

تعریف: ابتدا نیاز به معرفی زوج مرتب داریم، هر دو شیء مانند a و b یک زوج تشکیل می‌دهند که اگر برای آن‌ها ترتیب نیز قائل باشیم، یک **زوج مرتب**[8] شکل می‌گیرد که با نماد (a,b) نمایش داده می‌شود. شاید نقاط در $\mathbb{R}^۲$ بهترین مثال برای درک زوج مرتب باشند. زوج مرتب $(۲,۳)$ به عنوان یک نقطه در $\mathbb{R}^۲$ با زوج مرتب $(۳,۲)$ فرق دارد. شرط مساوی‌بودن دو زوج مرتب آن است که مؤلفه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند (هر کدام از a و b را مؤلفه یا مختص زوج مرتب (a,b) می‌نامیم) یعنی،

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c \text{ و } b=d$$

تعریف: اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند ضرب دکارتی $(A\times B)$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A\times B)=\{(x,y)\,|\,x\in A \text{ و } y\in B\}$$

با توجه به این تعریف، ضرب دکارتی دو مجموعه، مجموعه‌ای است شامل تعدادی زوج مرتب و هر عضو $(A\times B)$ توسط یک عضو از A و یک عضو از B تولید می‌شود و اعضای $(A\times B)$ یعنی زوج‌های مرتب با اعضای A و اعضای B قابل مقایسه نبوده و به‌نوعی جنس آن‌ها با هم متفاوت است! به مثال زیر توجه کنید:

$$A=\{۲,۴\},\ B=\{۱,۲,۵\}$$

$$A\times B=\{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۵),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۵)\}$$

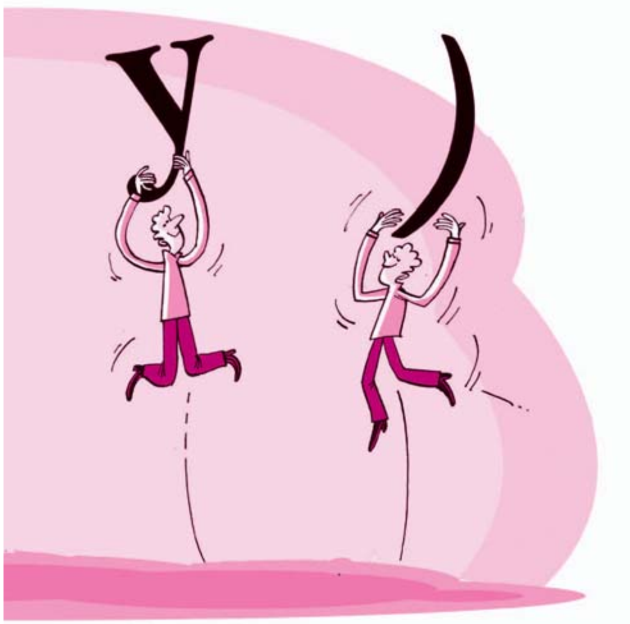
$$B\times A=\{(۱,۲),(۱,۴),(۲,۲),(۲,۴),(۵,۲),(۵,۴)\}$$

نتایج حاصل از تعریف ضرب دکارتی

I) $(a,b)\in A\times B\Leftrightarrow a\in A$ و $b\in B$

II) $(a,b)\notin(A\times B)\Leftrightarrow a\notin A$ یا $b\notin B$

III) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$



اثبات[9] (III) به برهان خلف[10]: فرض کنیم $A\times\varnothing\neq\varnothing$ (فرض خلف) پس:

$\exists(x,y)\in(A\times\varnothing)$

(خوانده می‌شود: وجود دارد (x,y)ای در $A\times\varnothing$)

$(x,y)\in(A\times\varnothing)\Rightarrow x\in A$ و $y\in\varnothing$

از آنجا که $y\in\varnothing$ تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

IV) $A\times B=B\times A\Leftrightarrow A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ یا $A=B$

V) $|A\times B|=|A||B|$

(منظور از $|A|$ همان $n(A)$ یا تعداد اعضای A است)

تذکر: چون مجموعهٔ تهی[11] تنها مجموعه‌ای است که اندازه یا تعداد اعضای آن صفر[12] است می‌توان نتیجه (III) را به روش زیر نیز ثابت کرد:

$$|A\times\varnothing|=|A||\varnothing|=|A|\times۰=۰\Rightarrow|A\times\varnothing|=۰$$
$$\Rightarrow A\times\varnothing=\varnothing$$

VI) $(A\times B)'=(A'\times B)\cup(A\times B')\cup(A'\times B')$

(اگر U مرجع A و V مرجع B باشد، آن‌گاه U×V مرجع A×B است)

اثبات (VI) به روش عضوگیری دلخواه

فرض کنیم: $(x,y)\in(A\times B)'\Leftrightarrow(x,y)\notin(A\times B)$

$\Leftrightarrow(x\notin A,y\in B)$ یا $(x\in A,y\notin B)$

یا $(x\notin A,y\notin B)$

$\Leftrightarrow(x\in A',y\in B)$ یا $(x\in A,y\in B')$

یا $(x\in A',y\in B')$

$\Leftrightarrow(x,y)\in(A'\times B)$ یا $(x,y)\in(A\times B')$

یا $(x,y)\in(A'\times B')$

$\Leftrightarrow(x,y)\in[(A'\times B)\cup(A\times B')\cup(A'\times B')])$

مثال: فرض کنیم $U=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $A=\{۲,۳\}$ و $B=\{۱,۲,۴\}$ در این صورت داریم:

$$(A\times B)'=(U\times U)-(A\times B)$$
$$=(U\times U)-\{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۴),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۴)\}$$
$$=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۳),(۳,۳),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴)\}$$

تذکر: اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد مجموعهٔ A×A را با $A^{۲}$ نمایش داده و داریم:

$$A\times A=A^{۲}=\{(a,b)|a,b\in A\}$$

VII) $|(A\times B)^{۲}|=|A\times B|^{۲}$

زیرا

$$|(A\times B)^{۲}|=|A\times B|\times|A\times B|=|A\times B|^{۲}$$

قضیه: اگر A و B و C و D چهار مجموعهٔ دلخواه باشند داریم:

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$$

(**اثبات قضیه:** با استفاده از تعریف ضرب دکارتی و تعریف اشتراک و به روش عضوگیری دلخواه به‌سادگی انجام‌پذیر است.)

نتیجهٔ مهم: با توجه به قضیهٔ قبل داریم:

$$(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(B\cap A)=(A\cap B)^{۲}$$
$$\Rightarrow|(A\times B)\cap(B\times A)|=|(A\cap B)^{۲}|=|A\cap B|^{۲}$$

VIII) $|(A\times B)\cup(B\times A)|=۲|A||B|-|A\cap B|^{۲}$

اثبات: برای اثبات از اصل شمول[13] و عدم‌شمول یعنی $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$|(A\times B)\cup(B\times A)|$$
$$=|A\times B|+|B\times A|-|(A\times B)\cap(B\times A)|$$
$$=|A||B|+|B||A|-|A\cap B|^{۲}=۲|A||B|-|A\cap B|^{۲}$$

مسئله: اگر $A=\{۱,۲,۳,...,۹\}$ و $B=\{۶,۷,...,۱۴\}$ در

این صورت مجموعهٔ $(A\times B)\cup(B\times A)$ چندعضوی است؟

حل: با توجه به دو مجموعهٔ A و B داریم:

$$A\cap B=\{۶,۷,۸,۹\},$$
$$|(A\times B)\cup(B\times A)|=۲|A||B|-|A\cap B|^{۲}$$
$$=۲\times۹\times۹-۴^{۲}=۱۶۲-۱۶=۱۴۶$$

$$IIX)\ |(A\times B)-(B\times A)|=|A||B|-|A\cap B|^{۲}$$

اثبات: از رابطهٔ $|A-B|=|A|-|A\cap B|$ استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$|(A\times B)-(B\times A)|$$
$$=|A\times B|-|(A\times B)\cap(B\times A)|=|A||B|-|A\cap B|^{۲}$$

$$IX)\ |(A\Delta B)|=|A|+|B|-۲|A\cap B|$$
$$|A\Delta B|=|(A-B)\cup(B-A)|$$
$$=|A-B|+|B-A|-\underbrace{|(A-B)\cap(B-A)|}_{\varnothing}$$
$$=|A|-|A\cap B|+|B|-|A\cap B|=|A|+|B|-۲|A\cap B|$$

تعمیم عمل ضرب دکارتی

بـا توجه به تعریف ضرب دکارتی، همواره به این نکته دقت داریم که عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه تعریف شـده است و حاصلِ این ضرب باید مجموعه‌ای باشد شامل تعدادی زوج مرتب؛ بنابراین داریم:

$$I)(A\times B)\times C=\{((x,y),z)\,|\,(x,y)\in A\times B \text{ و } z\in C\}$$
$$II)(A\times B)\times(C\times D)$$
$$=\{(x,y),(z,t)\,|\,(x,y)\in A\times B \text{ و } (z,t)\in C\times D\}$$

(حالت خاصِ II):

$$III)A^{۲}\times B^{۲}=\{((x,y),(z,t))\,|\,(x,y)\in A^{۲} \text{ و } (z,t)\in B^{۲}\}$$

مثـال: در کتاب جبر و احتمال، آخـر فصل ۲ در مبحث رابطه‌ها[14]، طبق قرارداد اگر رابطه‌ای چون R روی A تعریف شود به معنی آن است که $R\subseteq(A\times A)$ و تمرین‌هایی در کتاب مطرح شـده که در آن‌ها رابطهٔ R را روی $\mathbb{R}^{۲}$ تعریف کرده‌اند یعنی باید $R\subseteq\mathbb{R}^{۲}\times\mathbb{R}^{۲}$ باشد که با توجه به (III) داریم:

$$\mathbb{R}^{۲}\times\mathbb{R}^{۲}=\{((x,y),(z,t))\,|\,(x,y)\in\mathbb{R}^{۲},(z,t)\in\mathbb{R}^{۲}\}$$

و چون باید $R\subseteq\mathbb{R}^{۲}\times\mathbb{R}^{۲}$ در این صورت اعضای رابطهٔ R زوج مرتب‌هایی به‌صورت $((x,y),(z,t))$ هســتند. برای مثال رابطهٔ R روی $\mathbb{R}^{۲}$ $(R\subseteq\mathbb{R}^{۲}\times\mathbb{R}^{۲})$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\underbrace{(a,b)R(c,d)}_{((a,b),(c,d))\in R}\Leftrightarrow a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}+d^{۲}\ ((a,b) \text{ و } (c,d)\in\mathbb{R}^{۲})$$

به‌عنوان آخرین خاصیت از خواص عمل ضرب دکارتی، خاصیت توزیع‌پذیـری[15] عمل ضرب دکارتی در هر ۴ عملِ اجتماع، اشـتراک، تفاضل و تفاضل متقارن را بیان می‌کنیم (هر ۴ رابطه با استفاده از روش عضوی دلخواه اثبات می‌شود) اگر A و B و C مجموعه‌هایی دلخواه باشند داریم:

الف) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

ب) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

ج) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

د) $A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C)$

اثبات: د) با فرض این‌که (الف) و (ج) را با روش عضوگیری، ثابت کرده‌ایم خواهیم داشت:

$$A\times(B\Delta C)=A\times[(B-C)\cup(C-B)]$$
$$=[A\times(B-C)]\cup[A\times(C-B)]$$
$$=[\underbrace{(A\times B)}_{D}-\underbrace{(A\times C)}_{E}]\cup[\underbrace{(A\times C)}_{E}-\underbrace{(A\times B)}_{D}]$$
$$=(D-E)\cup(E-D)=D\Delta E=(A\times B)\Delta(A\times C)$$

مسـئله: اگـر $B\cup C=C$، حاصـل عبـارت زیـر را بیابید.

$$(A\times B)-(A\times C)$$

حـل: چـون $B\cup C=C$ پـس $B\subseteq C$ و در نتیجـه $B-C=\varnothing$ و بنابراین داریم:

$$(A\times B)-(A\times C)=A\times(B-C)=A\times\varnothing=\varnothing$$

پی‌نوشت:

1. Set
2. Union
3. Intersection
4. Difference
5. Symmetric Difference
6. Cartesian Product
7. Theorems
8. Ordered Pair
9. Proof
10. Proof by Contradiction
11. Empty
12. Zero
13. Inclusion Principle
14. Relations
15. Distributive

منابع:

۱. مبانی ریاضیات گسسته. مؤلفان: حمیدرضا امیری و یداله ایلخانی‌پور. ناشر: انتشارات مدرسه. ۱۳۸۸.

۲. جبر و احتمال (از سری کتاب‌های از مدرسه تا دانشگاه). مؤلفان: حمیدرضا امیری و میرشهرام صدر. ناشر: انتشارات مدرسه. ۱۳۸۶.