خلاقیت

مجتبی معارف‌وند

دبیر ریاضی مرکز استعدادهای درخشان شهید بهشتی شهر ری

قسمت (۱)

مهارت‌های حل مسئله

اشاره

از نشانه‌های یادگیری مؤثر دانش‌آموزان، آن است که بتوانند آموخته‌های خود را در حل مسئله به کار گیرند؛ لذا ایجاد توانایی حل مسئله، یکی از هدف‌های آموزش ریاضیات و علوم است.

ایجاد توانایی تفکر، تعقل و درست اندیشیدن در دانش‌آموزان از مهم‌ترین اهداف آموزش و پرورش است و حل مسئله در درس‌های ریاضی، امکانی فوق‌العاده برای شکل گرفتن نوعی ذخیرهٔ ذهنی و عقلانی در دانش‌آموزان و نیز بالا بردن قوهٔ ادراک آن‌ها ایجاد می‌کند و به همین سبب شورای معلمان ریاضی آمریکا (NCTM) در بازنگری استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای در سال ۲۰۰۰ میلادی تأکید نموده است که «حل مسئله، سنگ بنای آموزش ریاضیات در مدرسه است و بدون توانایی حل مسئله، سودمندی و توان ایده‌ها، دانش و مهارت ریاضی دانش‌آموزان به طور جدی محدود می‌شود.» (امّا) در فضای آموزشی کشور ما، محدودیت‌ها، دشواری‌ها و عواملی وجود دارند که مانع از شکوفا شدن استعدادها در جهت ایجاد و افزایش توانایی حل مسئله در دانش‌آموزان می‌شوند. در این مقاله به تشریح این موضوع و محدودیت‌های آن پرداخته‌ایم.

۱. محدودیت دورهٔ زمانی تألیف کتب درسی. این امر سبب می‌شود مؤلفان مجال و فرصت کافی برای تعیین و تدوین اهداف، استراتژی‌ها، استانداردها، برنامه‌ریزی درسی، پژوهش یا استفاده دقیق و مناسب از یافته‌های پژوهشی جدید در حوزه آموزش ریاضی را نداشته باشند و ممکن است با اتکا به تجربیات شخصی خود به تألیف بپردازند.

۲. محدودیت تعداد صفحات کتاب درسی؛ که مؤلفان را در شرح و بسط و پرداخت دقیق و عمیق سرفصل‌ها و موضوعات کتاب‌های درسی ریاضی در تنگنا قرار می‌دهند.

۳. محدودیت تعداد واحدهای یک ماده درسی (ساعات تدریس در هفته) موجب می‌گردد دبیران و دانش‌آموزان، به‌وضوح، عدم تعادل بین سرفصل‌ها و حجم کتاب‌های درسی ریاضی با میزان ساعات هفتگی آموزشی آن درس را احساس کنند و به اتفاق اعلام دارند که عملاً مجال و فرصتی برای بحث و گفت‌وگو، مکاشفه، پرداختن به جنبه‌های کاربردی و عملی موضوعات، فعالیت گروهی و قرار گرفتن در موقعیت حل مسئله و ارتقای مهارت‌های حل مسئله وجود ندارد.

۴. محدودیت ارزشیابی کمّی (نمره‌ای) و غلبهٔ تست و کنکور؛ امری که سبب می‌شود دانش‌آموزان همواره در اضطراب و نگرانی به سر برند و همت خود را فقط صرف دستیابی به نمرات بالاتر در کنکورهای آزمایشی بنمایند و کمتر به سمت فعالیت‌های گروهی، فکری، حل مسئله، کاربردی و عملی و... بروند.

۵. کتاب‌های کمک درسی؛ که بخش قابل توجهی از آن‌ها نه تنها به کتاب‌های درسی کمکی نمی‌کنند بلکه با ارائه پاسخ مسایل و فعالیت‌های آن‌ها، تنها روزنهٔ امید برای رسیدن به اهداف کتاب درسی را نیز مسدود می‌نمایند.

اکنون در این سلسله مقالات با نام «مهارت‌های حل مسئله» کوشش می کنیم که فضای مثبتی را ایجاد کنیم تا شما و دیگر علاقه‌مندان به ریاضی، فارغ از هرگونه نگرانی از نمره، تست، کنکور، محدودیت‌های کتاب درسی و مدرسه و کلاس درس و موانع دیگر، بتوانید به دست ورزی با مسایل بسیار زیبای ریاضی بپردازید و خلاقیت‌ها و استعدادهای خود را در حل آن‌ها بُروز دهید.

این مقالات شامل دو بخش خواهد بود. در بخش اول به طرح و شـــرح مباحثی می‌پردازیم که به‌طور مستقیم یا غیر مستقیم با «حل مسئله» مرتبط‌اند و می‌توانند مهارت‌های شما را در حل مسایل ریاضی افزایش دهند؛ مباحثی مانند:

- عوامل اساسی مؤثر در فرآیند حل مسئله؛
- معرفی راهبردها و روش‌های اســتدلال و حل مســئله در ریاضی؛
- معرفی ضرورت‌ها و پیش‌نیازهای لازم برای حل مسئله؛
- معرفی منابع دانشــی مفید و پرکاربرد در حل مسایل ریاضی؛
- ارائه یافته‌های پژوهشی جدید در حوزهٔ حل مسئله.

در بخش دوم؛ در شــماره‌های اول و دوم، یک مســئلهٔ جالب، زیبا و خوب انتخاب و مطرح می‌کنیم [شرودر و لِستر ۱۹۸۹، گویا، ۱۹۹۲، یکی از ملاک‌های انتخاب یک مســئله خــوب را، داشــتن پیش‌نیازهای کم و وجــود راه حل‌های متفاوت برای آن می‌دانند.]

مسئلهٔ مطرح شده حداقل با دو روش متفاوت حل می‌شود و بدین وســیله منابع دانشی شما افزایش می‌یابد. تکنیک‌ها و راهبردهای حل مسئله در ذهن‌تان جای‌گیر می‌شود و در مجموع توانایی‌ها و مهارت‌های حل مســئله در شما تقویت می‌گردد. سپس از شما دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به حل مســایل ریاضی دعوت می‌کنیم که به پیکار با مســئله بپردازید و روش‌ها و راه حل‌های متفاوت دیگری را برای آن پیدا کنید و به دفتر مجله بفرســتید. از شمارهٔ سوم و بعد از آن، در هر شماره گام‌های زیر را برمی‌داریم:

گام اول: راه‌حل‌های جدید شــما را که به دفتر مجله رسیده است؛ اعلام وصول می‌کنیم و آن‌ها را مورد ارزیابی و نقد و بررسی قرار می‌دهیم و نقطه نظرهای شورای برنامه‌ریزی مجله درخصوص نقاط قوت و ضعف راه‌حل‌های رســیده را، در قالب رهنمودهــا و توصیه‌های کلی یا جزئی، بیان می‌کنیم.

گام دوم: راه‌حل‌هــای درســت و کاملــی را کــه از طــرف دانش‌آمــوزان، دبیــران و دیگــر علاقه‌مندان بــه ریاضی پیشــنهاد شــده اســت به نــام خودشــان در مجله درج می‌کنیم.

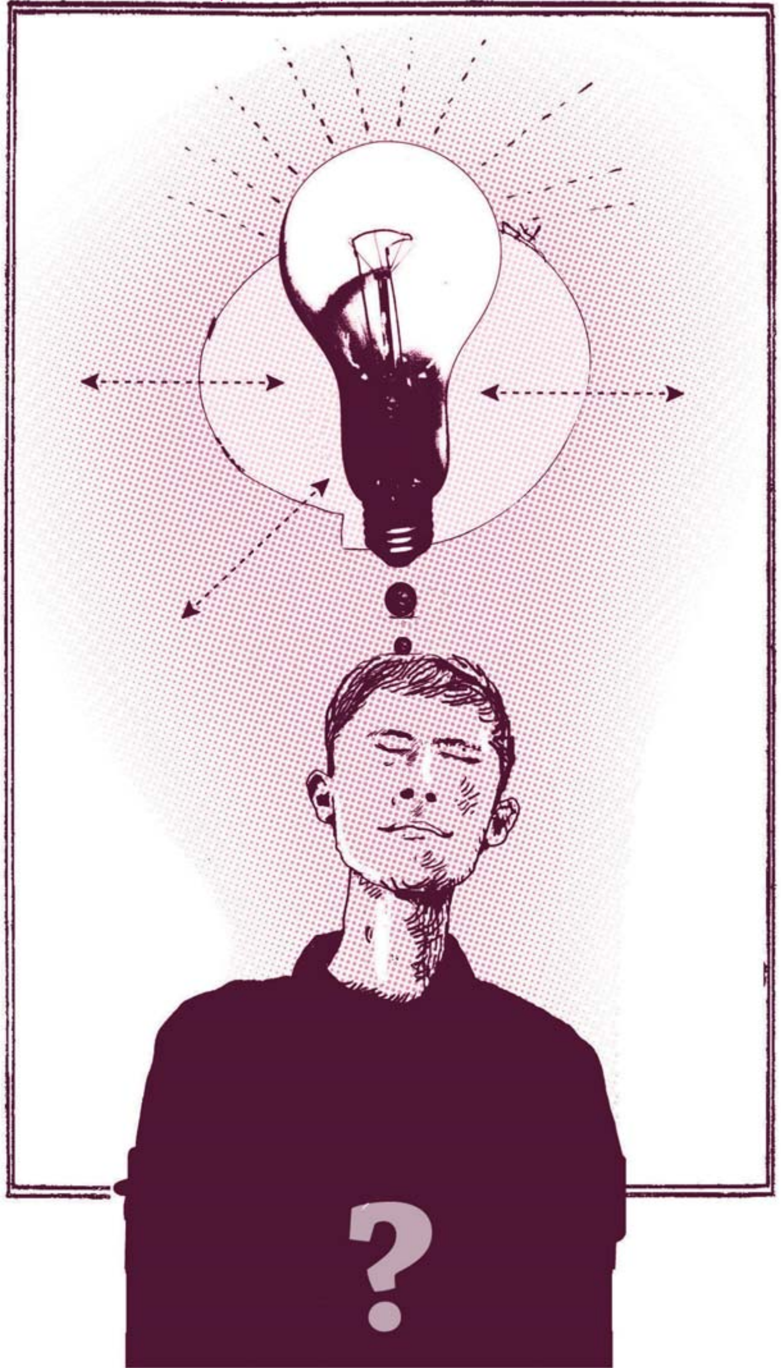
گام ســوم: یــک مســئله‌ی جدید مطــرح و بــا حداقل دو روش متفاوت آن را حل می‌کنیم ســپس از شــما و دیگر علاقه‌مندان به حل مســایل ریاضــی دعوت می‌کنیم که روش‌ها و راه‌حل‌های متفاوت دیگری برای آن بیابید و به دفتر مجله بفرستید.

بخش اول: عوامل مؤثر در فرآیند حل مسئله

آلن شونفیلد[1] دانشیار آموزش ریاضی در دانشگاه برکلی کالیفرنیا در آمریکا است. تحصیلات وی در ریاضیات محض، پایان نامهٔ فوق لیسانس او در زمینهٔ «توپولوژی» و پایان نامهٔ دکترای وی دربارهٔ «نظریهٔ اندازه» است.

وی در پی همنشــینی با جرج پولیا و خواندن آثار او به آموزش ریاضی گرایش پیدا می‌کند، محور پژوهش‌هایش در آموزش ریاضی، تفکر مولّد، خلاقیّت ریاضی و حل مســئله است.

شونفیلد بر روان‌شناسی تربیتی، روان‌شناسی شناختی، هوش مصنوعی و مردم شناسی مسلّط است و از این علوم در



آثار و پژوهش‌های خود کمک می‌گیرد. او سال‌ها سر دبیر مجلهٔ پژوهش در آموزش ریاضی[۲] بوده است و آثار و مقالات بی‌شماری دارد که از جمله کتاب آموزش حل مسئله[۳] از معروف‌ترین تألیفات او به شمار می‌رود.

شونفیلد (۱۹۸۵) چهار عامل اساسی زیر را از عوامل مؤثر در فرآیند حل مسئله می‌داند:

۱. منابع؛ شامل دانش ریاضی، حقایق دانسته شده قبلی و ابزارهایی که حل کننده مسئله در اختیار دارد و می‌تواند از آن‌ها به عنوان اطلاعات، امکانات و مفروضات اولیه استفاده کند، از جمله: مفاهیم اولیّه (نقطه، خط، مجموعه و...)، تعاریف، اصول، قضیه‌ها، مسئله‌های مهم و کاربردی و مفروضات و معلومات مسئله.

۲. رهیافت‌ها؛ شامل فنون، روش‌ها، تکنیک‌ها، ترفندها، راهبردها، استراتژی‌ها، ایده‌ها، راهکارها، قوانین منطق و پیشنهادهای عمومی است که به حل کنندهٔ مسئله کمک می‌کند که درک و فهم مناسبی از فرض‌ها و حکم‌های مسائل و ارتباط آن‌ها با هم به دست آورد و از منابع به صورتی مناسب، درست، به جا، مرتب، مؤثر و هدفمند برای رسیدن به جواب (حکم مسئله) استفاده کند، مانند رسم شکل، رسم جدول، حدس و آزمایش (استدلال استقرایی)، بررسی و امتحان حالت‌های خاص، انتخاب نمادها و نامگذاری مناسب، تغییر متغیر، تبدیل مسئله به مسئله خویشاوند، تغییر دیدگاه، برهان خلف، استقرای ریاضی، مثال نقض، اثبات بازگشتی و...

براساس مدل شونفیلد، زمانی که شخصی می‌خواهد مسئله را حل کند، ابتدا منابع دانشی مرتبط را از دانسته‌های خویش بازخوانی می‌کند و آن‌ها را در قالب رهیافت برای رسیدن به حکم مسئله به کار می‌برد. بنابراین هم در اختیار داشتن دانش ریاضی مورد نیاز و هم توانایی بازخوانی مناسب، به جا و مؤثر آن شرایط لازم برای موفقیت در حل مسئله‌اند.

۳. کنترل؛ توانایی‌های کنترلی، به چگونگی استفاده از اطلاعات بالقوه‌ای که حل کنندهٔ مسئله در اختیار دارد مربوط می‌شود. به ویژه فراخوانی مناسب منابع مفید و کارآمد، انتخاب رهیافت مناسب یا ترکیب و ادغام آن‌ها و سایر تصمیم‌گیری‌های کلیدی در ضمن حل مسئله.

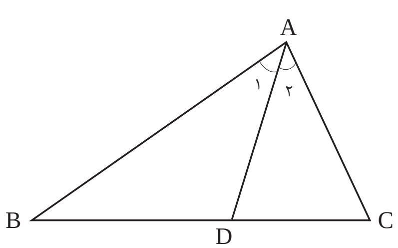
۴. نظام باورها؛ نظام باورها به معنای نوع نگرش ریاضی فرد و در واقع جهان بینی ریاضی او و دیدگاهی است که از منظر آن مسایل خود را حل می‌کند. از آن جمله است: باور فرد نسبت به خود به عنوان حل کنندهٔ مسئله (اعتماد به نفس)، باور فرد نسبت به محیط و شرایط اطراف خود (مثلاً فرد باور دارد که در کلاس هرگز نمی‌تواند خوب مسئله حل کند اما در منزل و اتاق خود کاملاً توانمند است و به‌طور متمرکز مسئله را حل می‌کند.) و باور فرد نسبت به یک موضوع ریاضی خاص (مثلاً بر مثلثات مسلط است و باور دارد که هر مسئله‌ای را با منابع و روش‌های مثلثاتی می‌تواند حل کند. لذا چنین فردی، در برخورد با هر مسئله، ابتدا ایده‌های مثلثاتی را دنبال می‌کند و به‌کار می‌گیرد.)

حل مسئله، سنگ بنای آموزش ریاضیات در مدرسه است و بدون توانایی حل مسایل، سودمندی و توان ایده‌ها، دانش و مهارت ریاضی دانش‌آموزان به طور جدی محدود می‌شود

با توجه به مدل حل مسئلهٔ شونفیلد، می‌توان چهار عامل قبل را به عنوان متغیرهایی در نظر گرفت که حل هر مسئله‌ای، تابعی از آن‌هاست. بنابراین تنوع راه حل‌های یک مسئلهٔ واحد، ناشی از تغییر این متغیرهاست، یعنی وجود تفاوت در منابع دانشی افراد، رهیافت‌ها، تکنیک‌ها و استراتژی‌های موجود در ذهن آن‌ها، توانایی‌های کنترلی و فراشناختی آن‌ها و در نهایت نگرش و باور ریاضی آن‌ها، منجر به تولید راه حل‌های متنوع و متفاوت برای یک مسئله می‌شود.

اکنون در یک کلاس درس نمادین، شامل معلم و دانش‌آموزانی که در هر یک از پارامترها و عوامل مؤثر در فرآیند حل مسئله با یکدیگر تفاوت‌های قابل توجهی دارند، به طرح و حل یک مسئله می‌پردازیم تا نقش عوامل چهارگانهٔ شونفیلد را در تولید راه حل‌های متفاوت برای مسئلهٔ مطرح شده بهتر درک کنیم.

معلّم **قضیهٔ نیمساز زاویهٔ داخلی** را مطرح می‌کند: «**در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.**» سپس با رسم مثلث ABC و کشیدن AD نیمساز زاویهٔ A، حکم مسئله را به صورت $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$ بیان می‌کند و از دانش‌آموزان می‌خواهد آن را اثبات نمایند.



● محمد، دانش‌آموزی است که از منابع دانشی خوبی برخوردار است و به خوبی می‌تواند آن‌هارا بازخوانی کرده و در مسیر استراتژی حل مسئله از آن‌ها استفاده کند. او

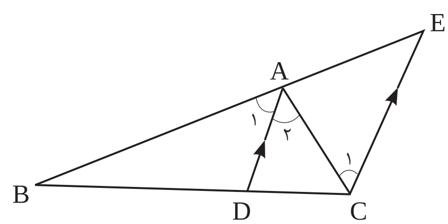
می‌گوید: «از آنجا که حکم مسـئله به صورت یک تناسب است احتمالاً با استفاده از قضیهٔ تالس و یا تشابه مثلث‌ها می‌توان مسئله را حل کرد، اما برای استفاده از قضیهٔ تالس باید خطی موازی یک ضلع مثلث وجود داشته باشد.»

بنابراین محمد برای رسـیدن به مقصود، راهبرد رسـم خطی موازی یک جزء از مسئله را انتخاب می‌کند. او با توجه به نسبت $\frac{BD}{DC}$ حدس می‌زند که خط موازی را باید از نقطهٔ C رسم کند، اما موازی کدام خط؟

از آنجـا که محمد توانایی‌های کنترلـی خوبی نیز دارد ضمن تمرکز کامل روی مسئله دو پیشنهاد را در ذهن خود مرور می‌کند، یکی رسم خطی موازی AD و گذرنده از نقطهٔ C، و دیگری رسـم خطی موازی AB و گذرنده از نقطهٔ C؛ جالب این‌که هر دو پیشنهاد او منجر به حل مسئله می‌شود؛ توجه کنید:

راه‌حل اول: رسـم یک خط موازی و اسـتفاده از قضیهٔ تالس.

از نقطهٔ C خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.



$$\overset{\Delta}{BCE}: AD \parallel CE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE} \quad (۱)$$

از سوی دیگر:

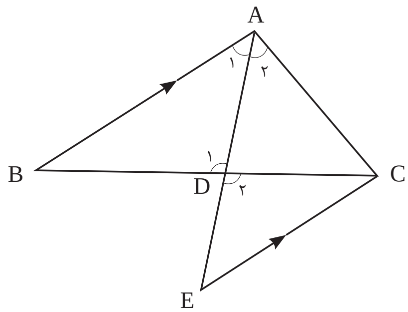
$$\left.\begin{array}{l}(AD \parallel CE,\ \text{مورب و}\ AC) \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{C}_۱\\(AD \parallel CE,\ \text{مورب و}\ AB) \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{E}\\ \quad \hat{A}\ \text{نیمساز}\ \ AD \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}_۲\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{E}=\hat{C}_۱ \Rightarrow AC=AE \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

راه‌حل دوم: رسـم یک خط موازی و اسـتفاده از تشابه مثلث‌ها.

از نقطهٔ C خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا امتداد AD را در نقطهٔ E قطع کند.



$$\left.\begin{array}{l}(AB \parallel CE\ \ \text{مورب و}\ \ AE) \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{E}\\ \quad \hat{A}\ \text{نیمساز}\ \ AD \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}_۲\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{E} \Rightarrow AC=EC \quad (۱)$$

از طرف دیگر داریم:

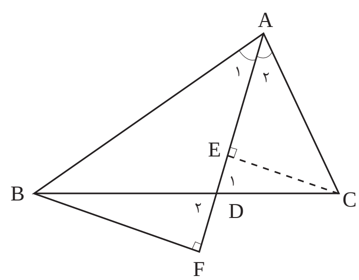
$$\begin{cases}\hat{D}_۱=\hat{D}_۲\\ \hat{A}_۱=\hat{E}\end{cases} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}D \sim E\overset{\Delta}{D}C$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{EC}\overset{(۱)}{\Rightarrow}\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

***

- احمد دانش‌آموز دیگری اسـت که بر منابع دانشی قضیهٔ تالس و نتایج آن و تشـابه مثلث‌ها کاملاً مسـلّط است. او در حالی‌که راه حل‌های محمد را تأیید می‌کند، راهبرد و تکنیک دیگری را برمی‌گزیند که در آن مثلث‌های متشابه مناسـبی را ایجاد کرده و با تعقیب این رویکرد جدید به حل مسئله نائل می‌شود. راه حل احمد را ببینید:

راه‌حل سـوم: ایجاد مثلث‌های متشابه و ترکیب تناسب اضلاع متناظر آن‌ها.



در مثلث ABC، از دو رأس B و C، دو عمود BF و CE را بر نیمساز AD فرود می‌آوریم.

دو مثلـث قائم‌الزاویـهٔ ACE و ABF متشـابه‌اند، زیرا $\hat{E}=\hat{F}=۹۰^\circ$ و $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$. حـال از تشـابه دو مثلـث فوق نتیجه می‌گیریم که: $\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{CE}$ (۱).

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases}\hat{E}=\hat{F}=90^\circ\\ \hat{D}_1=\hat{D}_2\end{cases}\Rightarrow B\overset{\Delta}{D}F\sim C\overset{\Delta}{D}E$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{BF}{EC}\qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

***

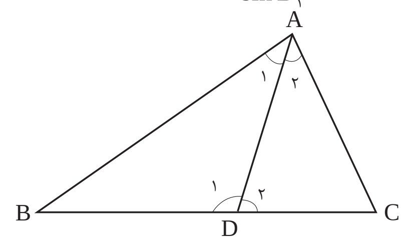
● علی دانش‌آموزی است که منابع دانشی او در هندسه چندان غنی نیست اما در حسابان و به‌طور خاص در مثلثات پربار و مسلط می‌نماید و این قابلیت، این باور را در او ایجاد کرده که مثلثات و روش‌های مثلثاتی بهترین و مؤثرترین منبع و راهبرد برای حل مسایل می‌باشند؛ لذا تلاش می‌کند راه حلی مثلثاتی برای این مسئله پیدا کند و موفق هم می‌شود. راه حل علی را ببینید.

روش چهارم: ایدهٔ مثلثاتی؛ استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها

قضیه سینوس‌ها را در دو مثلث ABD و ACD می‌نویسیم.

$$A\overset{\Delta}{B}D:\frac{\sin\hat{A}_1}{BD}=\frac{\sin\hat{D}_1}{AB}\Rightarrow\frac{\sin\hat{A}_1}{\sin\hat{D}_1}=\frac{BD}{AB}\qquad (۱)$$

$$A\overset{\Delta}{C}D:\frac{\sin\hat{A}_2}{DC}=\frac{\sin\hat{D}_2}{AC}\Rightarrow\frac{\sin\hat{A}_2}{\sin\hat{D}_2}=\frac{DC}{AC}\qquad (۲)$$



از طرف دیگر داریم:

$$\begin{rcases}\hat{A}\ \text{نیمساز}\ AD\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{A}_2\Rightarrow\sin\hat{A}_1=\sin\hat{A}_2\\ \hat{D}_1+\hat{D}_2=180^\circ\Rightarrow\sin\hat{D}_1=\sin\hat{D}_2\end{rcases}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin\hat{A}_1}{\sin\hat{D}_1}=\frac{\sin\hat{A}_2}{\sin\hat{D}_2}\qquad (۳)$$

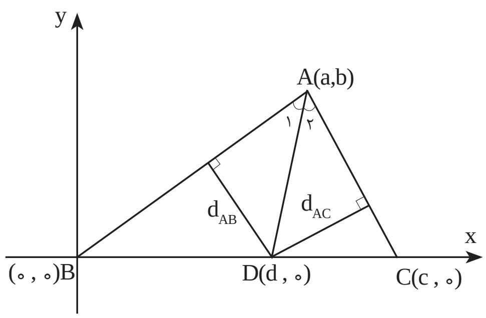
از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم: $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$

و در نهایت: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

***

● مجتبی دانش‌آموزی است که منابع دانشی او غنی و مطلوب است و دانسته‌های خود را به خوبی در خاطر دارد و با انتخاب درست و مناسب رهیافت‌ها، فرآیند حل مسئله را در کنترل خود نگه می‌دارد. او اعتماد به نفس بالایی دارد و باور دارد که همواره می‌تواند مسایل ریاضی را با استفاده از منابع و تکنیک‌هایی دور از ذهن حل کند. یکی از علاقه‌مندی‌های مجتبی حل مسایل هندسی به روش جبری ـ مختصاتی یا تحلیلی است. راه حل او را ببینید.

راه‌حل پنجم: ایدهٔ جبری ـ مختصاتی یا تحلیلی



مثلث ABC را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که ضلع BC بر محور xها و نقطهٔ B بر مبدأ مختصات منطبق باشند، با توجه به مختصات رئوس مثلث، معادلات خطوط AB و AC را به صورت ذیل داریم:

معادله خط AB:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\Rightarrow y-0=\frac{b-0}{a-0}(x-0)$$

$$\Rightarrow y=\frac{b}{a}x\Rightarrow bx-ay=0$$

معادله خط AC:

$$y-0=\frac{b-0}{a-c}(x-c)$$

$$\Rightarrow (a-c)y-bx+bc=0$$

حال از آن جا که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است پس فاصله عمودهای مرسوم از نقطهٔ D بر اضلاع AB و AC با هم برابرند؛ یعنی:

$$d_{AB}=d_{AC}$$

$$\Rightarrow\frac{|bd-a(0)|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}=\frac{|(a-c)(0)-bd+bc|}{\sqrt{(a-c)^2+(-b)^2}}$$

$$\Rightarrow\frac{|bd|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{|b(c-d)|}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow\frac{|b||d|}{|b||c-d|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$$

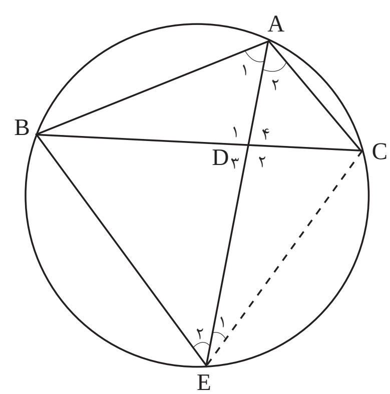
$$\xRightarrow[c>d]{d>۰} \frac{d}{c-d}=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}{\sqrt{(a-c)^{۲}+b^{۲}}}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

● شـــهرام دانش‌آموزی است که از نظر وضع ظاهری کمی تُپل اســت. خودش به شــوخی می‌گوید: من چون تُپل و گِرد و قلمبه‌ام دایره‌ها را خیلی دوســت دارم و به همین دلیل در حوزهٔ دایره‌ها و اســتفاده از آن‌ها در حل مسایل احساس قدرت و برتری خاصی دارم:

شــهرام بــا توجه به این احســاس، در برخورد با این مســئله از ترکیب دایره‌ها و تشــابه ســود برده و راه حل زیبایی پیدا می‌کند. راه حل او را ببینید.

راه حل ششم: استفاده از ترکیب دایره‌ها و تشابه



دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رســم می‌کنیم، ســپس نیمســاز AD را امتداد می‌دهیم تا ایــن دایره را در نقطهٔ E قطع کند. با رسم وترهای CE و BE داریم:

$$\hat{A} \text{ نیمساز } AD \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \Rightarrow \widehat{BE}=\widehat{CE}$$

$$\Rightarrow BE=CE\ (۱)$$

از سوی دیگر داریم:

$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{E}_۱=\dfrac{\widehat{AC}}{۲} \\ \hat{D}_۱=\hat{D}_۲\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{CDE}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DE}=\frac{AB}{CE} \quad (۲)$$

همچنین:

$$\begin{cases}\hat{C}=\hat{E}_۲=\dfrac{\widehat{AB}}{۲} \\ \hat{D}_۳=\hat{D}_۴\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ADC} \sim \overset{\Delta}{BDE}$$

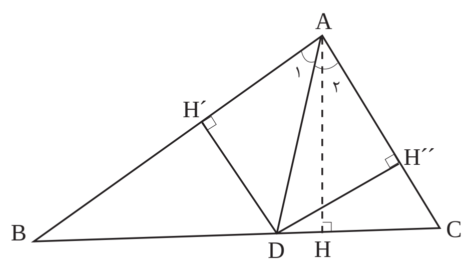
$$\Rightarrow \frac{DC}{DE}=\frac{AC}{BE} \quad (۳)$$

با تقســیم طرفین روابط (۲) و (۳) بر هم و اســتفاده از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌گیریم که: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

***

● و بالاخره پارســا، یکی دیگر از دانش‌آموزان، معتقد است که قضایا در هندسه اهمیت ویژه‌ای دارند و در حل مسایل هندسه بسیار به کار می‌روند. با این حال، در برخی موارد اگر قضیه‌ای در حل یک مسئلهٔ وابسته به آن به کار نرود بــه احتمال قوی، راهبرد، تکنیک و روش اثبات آن قضیه یا روشــی مشــابه آن می‌تواند در حل آن مسئله مفید و کارآمد باشد. این باور پارسا سبب می‌شود که ایدهٔ استفاده از مساحت را، که برای اثبات قضیه تالس بسیار مفید واقع شده بود، به نوعی شبیه سازی کرده و آن در این مسئله به کار ببرد و اتفاقاً موفق هم می‌شود. راه حل پارسا را ببینید.

راه‌حل هفتم: ایدهٔ استفاده از مساحت‌ها



در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ A می‌باشد. از نقطهٔ D عمودهــای DH' و DH'' را بر دو ضلع AB و AC وارد می‌کنیم.

$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \\ AD=AD \\ \hat{H}'=\hat{H}''=۹۰^\circ\end{cases} \Rightarrow A\overset{\Delta}{D}H' \cong A\overset{\Delta}{D}H''$$

$$\Rightarrow DH'=DH'' \quad (۱)$$

به عبارت دیگر هر نقطه روی نیمســاز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

از سوی دیگر داریم:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BD}{\frac{۱}{۲}AH\times CD}=\frac{BD}{CD} \quad (۲)$$

همچنین:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{\frac{۱}{۲}DH'\times AB}{\frac{۱}{۲}DH''\times AC}\overset{(۱)}{=}\frac{AB}{AC} \quad (۳)$$

و از روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که: $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$.

بخش دوم: مسئلهٔ مسابقه‌ای

در هندسهٔ اقلیدسی، مثلث جایگاه ویژه‌ای دارد و همواره در کانون توجه علاقه‌مندان به هندسه است. در بین انواع مثلث‌ها، مثلث متساوی‌الساقین محبوبیت بیشتری دارد به‌گونه‌ای که قضایا و ویژگی‌های جالب و فراوانی دربارهٔ آن وجود دارد و مسایل بسیار متنوعی در سطوح مختلف برای آن قابل طرح است.

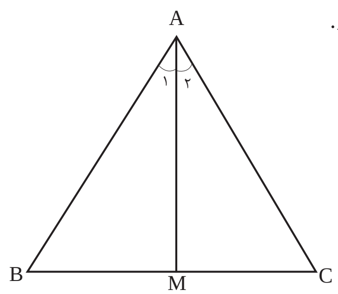
یکی از قضیه‌های مقدماتی درخصوص مثلث متساوی‌الساقین قضیه زیر است:

«قضیه: در هر مثلث متساوی‌الساقین، میانهٔ وارد بر قاعده، ارتفاع وارد بر قاعده و نیمساز زاویهٔ مقابل به قاعده، برهم منطبق‌اند.»

یکی از قضیه‌های عکس قضیهٔ فوق، قضیه زیر است:

«عکس قضیه: اگر در مثلثی، میانه وارد بر یک ضلع و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع بر هم منطبق باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است.»

به بیان دیگر اگردر مثلث ABC، AM میانهٔ وارد بر ضلع BC و نیز نیمساز زاویهٔ A باشد؛ باید نشان دهیم که AB = AC.

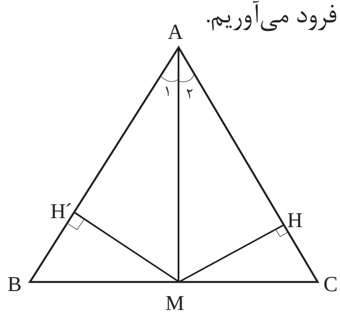


اکنون به دو راه حل متفاوت برای این مسئله توجه کنید:

راه حل اول: ایدهٔ استفاده از همنهشتی مثلث‌ها

یکی از اساسی‌ترین روش‌های اثبات برابری دو پاره خط، آن است که دو مثلث بیابیم و یا ایجاد کنیم که پاره‌خط‌های مورد نظر مسئله دو ضلع آن دو مثلث باشند؛ سپس به کمک مفروضات دیگر مسئله تلاش می‌کنیم که نشان دهیم آن دو مثلث انتخابی با هم، همنهشت می‌باشند و از همنهشتی آن‌ها، برابری اجزای نظیر، و در نتیجه برابری پاره‌خط‌های مورد نظر مسئله، حاصل می‌شود.

از نقطهٔ M پای میانه، عمودهای MH و MH' را بر اضلاع AC و AB فرود می‌آوریم.



$$\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ \hat{H}'=\hat{H}=90^\circ\\ AM=AM\end{cases}\Rightarrow A\overset{\Delta}{M}H\underset{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}}{\cong}A\overset{\Delta}{M}H'\Rightarrow MH=MH'$$

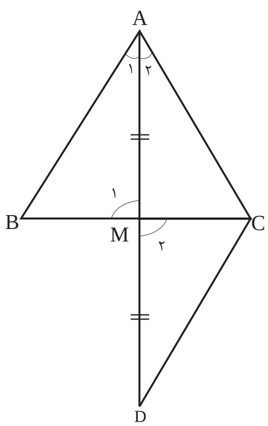
$$\begin{cases}MH=MH'\\ MC=MB\\ \hat{H}'=\hat{H}=90^\circ\end{cases}\Rightarrow M\overset{\Delta}{B}H'\underset{\text{وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه}}{\cong}M\overset{\Delta}{C}H\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}$$

از تساوی زوایای فوق، بنابر قضیه، نتیجه می‌گیریم که مثلث ABC متساوی الساقین است.

***

راه‌حل دوم: ایدهٔ امتداد دادن میانه به اندازهٔ خودش

در هر مسئله‌ای که میانهٔ مثلث یکی از معلومات و مفروضات آن است یا حکم مسئله به میانه مربوط می‌شود، ایدهٔ امتداد دادن میانه به اندازهٔ خودش و رسیدن به شکل جدیدی با اطلاعات مناسب‌تر، عموماً موفقیت آمیز است و منجر به حل آن مسئله می‌شود. توجه کنید:



میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D حاصل شود؛ با رسم DC داریم:

$$\begin{cases}BM=CM\\ \hat{M}_1=\hat{M}_2\\ AM=MD\end{cases}\Rightarrow A\overset{\Delta}{B}M\cong D\overset{\Delta}{C}M\Rightarrow\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{D} & (1)\\ AB=DC & (2)\end{cases}$$

از آنجا که AM نیمساز زاویهٔ A است، پس $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و با توجه به رابطهٔ (۱) خواهیم داشت $\hat{D}=\hat{A}_2$ و این نیز متساوی الساقین بودن مثلث ADC را سبب می‌شود: یعنی

$$AC=DC \quad (3)$$

از روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که: AB = AC .

***

دانش‌آموزان عزیز، اکنون ما، مشتاق و منتظر دریافت راه حل‌های متفاوت دیگری از سوی شما عزیزان برای این مسئله هستیم، تا راه‌حل‌های شما را با نام خودتان در مجله چاپ نماییم. پس قلم و کاغذ را بردارید و دست به‌کار شوید.

پی‌نوشت:

1. Alan. H. Schoenfeld
2. Jornal for research in Math education
3. Mahematical Problem Solving

منابع:

۱. حسام، عبداله، (۱۳۸۹). راه‌حل‌های درست و نادرست مسائل، هر دو متنوعند. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۱۰۰. صص ۶۲ تا ۶۹. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲. شرف‌الدین، احمد، (۱۳۸۷) قضیهٔ نیم‌ساز مثلث و کاربردهایی از آن. مجلهٔ رشد برهان دورهٔ متوسطه. شمارهٔ ۶۰. صص ۹ تا ۱۵. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی‌آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۳. رفیع‌پور، ابوالفضل و گویا، زهرا، (۱۳۸۶). چرایی و چگونگی‌آموزش‌هندسه در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۹۰. صص ۲۶ تا ۳۳. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۴. عریضی، حمیدرضا، (۱۳۷۹). شرح زندگی و فعالیت‌های برخی از دانشمندان برجسته آموزش ریاضی. مجموعه مقالات‌کنفرانس آموزش ریاضیات‌در دورهٔ متوسطه، ص ۳۲۸. اداره کل آموزش و پرورش استان اصفهان.