میرشهرام صدر

باروها د

قسمت (۱)

مقدمه

در زمان‌های گذشته، به‌طور معمول دورتادور هر شهر را با دیواره‌ای محدود می‌کردند که به آن بارو می‌گفتند. به طور حتم شما بارها کلمهٔ برج و بارو را شنیده‌اید. برج به ساختمان قلعه و بارو به دیوار یا حصار آن گفته می‌شود که قلمرو یا محدوده آن را مشخص می‌کند.

در ایـن مقاله به معرفی باروهـا در ریاضی می‌پردازیم. به نظر شـما منظورمان از باروها در ریاضی چیست؟

چــه الفاظی محدوده یا قلمـرو یک عبارت ریاضی را تعیین می‌کنند؟

قبل از پاسـخ به این سؤالات، لازم است به معرفی چند اصطلاح در منطق ریاضی بپردازیم.

منطق ریاضی

منطق ریاضی که گاه به آن، منطق نمادی[۱] نیز می‌گویند؛ دســتور و زبان ریاضیات اسـت. این شـاخه از ریاضیات به بررســی دقیق اســتدلال‌ها می‌پردازد و درستی یا نادرستی یک اســتدلال را مشخص می‌کند. منطق ریاضی با کارهای آگوستوس دمرگان[۲]، جرج بول[۳]، برتراند راسل[۴] و دیگران به پیشرفت قابل ملاحظه‌ای دست یافته است.

گزاره

جمله‌هــای خبری: «قروه شــهری در اســتان کردستان است»،

«۴+۳ برابر با ۵ اســـت» و «$\pi^{\sqrt{۲}}$ عددی گنگ اســـت» را گزاره[۵] می‌نامیم. گزاره، جمله‌ای خبری است که دارای ارزش درست[۶] یا نادرست[۷] باشد در این سه گزاره، اولی درست و دومی نادرست است. ممکن است ارزش یک گزاره برای ما معلوم نباشد، مانند گزارهٔ ســوم ولی می‌دانیم که اگر درست نباشد، پس نادرست است، یعنی این گزاره فقط دارای یک ارزش است.

جملهٔ خبری «کریســـتیانو رونالدو بهترین فوتبالیســـت جهان اســـت» گزاره نیست، زیرا ارزش آن بستگی به سلیقه افراد مختلف دارد و به نظر برخی درست و برای کسان دیگر نادرست به‌نظر می‌رسد. باید توجه داشت جمله‌ای خبری که فقط دارای یک ارزش باشد، گزاره محسوب می‌شود.

گزاره‌ها را با حرف‌های p، q، r، t، s نمایش می‌دهند.

گزاره‌نما

هــر جملهٔ خبری که شــامل یک یا چند متغیر اســـت، به‌طوری که ارزش آن به علت وجود متغیر نامشخص باشد و با جایگذاری اسم خاص به جای متغیرها به یک گزاره تبدیل شـــود،، گزاره‌نما[۸] نامیده می‌شود. برای مثال، در گزاره نمای «x یک عدد فرد اســـت»؛ اگر $x = ۱۵$ در این صورت ارزش آن درست و اگر $x = ۶$ آن‌گاه ارزش آن نادرست است.

گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کار رفته در آن‌ها، یک‌متغیره، دو متغیر و... می‌نامیم.

مثال. هر کدام از عبارت‌های زیر گزاره‌نما هستند.

الف. x عددی اول است. **ب.** $۳x + ۲ = ۱۴$

ج. $۴x + ۳y = ۵$ **د.** $x + ۲y + z = -۱$

«الف و ب» گزاره‌نماهایی با یک متغیر و «ج» گزاره‌نمایی بـا دو متغیر و «د» گزاره‌نمایی با ســه متغیر اســـت. در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرارداد تا گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود، **دامنهٔ متغیر**[۹] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند. برای مثال، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «p عددی اول اســـت» مجموعهٔ اعداد طبیعی و دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «$۵x^۲ + x - ۶ = ۰$» مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

در زمان‌های گذشته، به‌طور معمول دور تادور هر شهر را با دیواره‌ای محدود می‌کردند که به آن بارو می‌گفتند

برج به ساختمان قلعه و بارو به همان دیوار یا حصار قلعه گفته می‌شود که قلمرو یا محدوده آن را مشخص می‌کند

در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی که بتوان جایگزین متغیرهای آن قرارداد تا گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، **مجموعهٔ جواب**[10] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند. باید توجه داشت که مجموعهٔ جواب گزاره‌نما همواره زیرمجموعهٔ دامنه متغیر گزاره‌نما است، یعنی همواره داریم: $S \subseteq D$

مثال: دامنهٔ متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است، مجموعهٔ جواب‌های هریک از آن‌ها را مشخص کنید.

الف. x عددی فرد است. $(D = \mathbb{R})$

ب. $\log_3^{x+2} = 1$ $(D = (-2, +\infty))$

ج. $x^2 + y^2 \le 4$ $(D = \mathbb{R}^2)$

حل الف:

$S = \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

حل ب: برای یافتن مجموعهٔ جواب گزاره‌نما، معادلهٔ لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$\log_3^{x+2} = 1 \Rightarrow \log_3^{x+2} = \log_3^3$

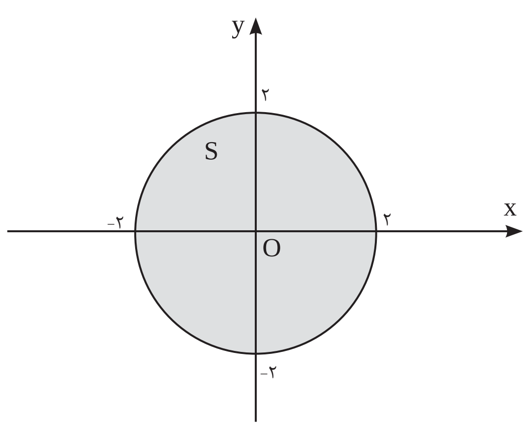
$\Rightarrow x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1 \in D$

$\Rightarrow S = \{1\}$

حل ج: در این گزاره‌نما به جای x و y هر عدد حقیقی دلخواهی را می‌توان قرارداد؛ در نتیجه دامنهٔ متغیر آن برابر با صفحهٔ مختصات است، ملاحظه می‌کنیم که:

$x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow D = \mathbb{R}^2$

چون نامعادلهٔ $x^2 + y^2 \le 4$، نقاط درون یا روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ را مشخص می‌کند، پس نمودار مجموعهٔ جواب این نامعادلهٔ دو متغیره به‌صورت زیر است:



ترکیب گزاره‌ها

از ترکیب دو یا چند گزاره، به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای ذیل، گزارهٔ مرکب به دست می‌آید.

الف ــ ناقض[11] با علامت «~» به معنی «چنین نیست که»

مثال: «چنین نیست که ۲ عددی اول باشد» یا «۲ عددی اول نیست» نقیض گزارهٔ «۲ عددی اول است» می‌باشد. اگر ارزش گزاره‌ای درست (نادرست) باشد در این صورت ارزش نقیض آن نادرست (درست) است.

ب ــ فاصل[12] با علامت «$\vee$» به معنی «یا»

اگر p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $p \vee q$ را ترکیب فصلی در گزاره می‌گوییم. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره وقتی نادرست است که ارزش هر دو مؤلفه آن نادرست باشد، در بقیهٔ حالات، ارزش $p \vee q$ درست است.

مثال: گزاره‌نمای $(x-2)(x-1) = 0$ به معنای آن است که:

$(x - 2 = 0) \vee (x - 1 = 0)$

ج ــ عاطف[13] با علامت «$\wedge$» به معنی «و»

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $p \wedge q$ را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو مؤلفه آن درست باشد؛ در بقیهٔ حالات، ارزش $p \wedge q$ نادرست است.

مثال: عبارت جبری $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1}$ وقتی تعریف شده است که:

$(x - 2 \ge 0) \wedge (x - 1 \ge 0)$

د ــ شرطی[14] با علامت «$\Rightarrow$» به معنی «اگر، آن گاه»

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $p \Rightarrow q$ را ترکیب شرطی p با q می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را فرض (مقدم) و q را حکم (تالی) می‌نامیم. ارزش ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ وقتی نادرست است که ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست باشد. در بقیه حالات ارزش این گزاره درست است.

مثال: گزاره‌نمای «اگر a عددی فرد باشد آن‌گاه مربع آن نیز عددی فرد است» را می‌توان به این صورت نوشت:

$a \in O \Rightarrow a^2 \in O$

(مجموعه اعداد فرد را با O[15] نمایش می‌دهیم.)

مثال: با استفاده از تعریفِ ارزش درستیِ گزارهٔ «$p \Rightarrow q$»، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف. اگر ۰ > ۱ آن‌گاه ۵ عددی فرد است.

ب. اگر ۰ > ۱ آن‌گاه ۵ عددی زوج است.

حل. الف: این گزاره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\underbrace{0>1}_{p} \Rightarrow \underbrace{5 \in O}_{q}$$

می‌دانیم ارزش p نادرست و ارزش q درست است، پس ارزش این گزاره شرطی درست است.

ب. $\underbrace{0>1}_{r} \Rightarrow \underbrace{5 \in E}_{s}$

(مجموعه اعداد زوج را با E[16] نمایش می‌دهیم.)

در این گزاره r دارای ارزش نادرست و s هم نادرست است، پس طبق تعریف، ارزش این گزاره درست است.

ارزش گزارهٔ ترکیب شرطی را می‌توان به صورت جدول زیر نوشت:

p	د	د	ن	ن
q	د	ن	د	ن
$p \Rightarrow q$	د	ن	د	د

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنید که هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ همواره درست است، در این حالت‌ها می‌گویند، ارزش $p \Rightarrow q$ به **انتفای مقدم**، درست است.

در مثال قبل؛ می‌توان گفت که ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم، درست است.

هـ. دو شرطی[17] با علامت «$\Leftrightarrow$» به معنی «اگر، آن‌گاه و برعکس»

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $p \Leftrightarrow q$ را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم و آن را چنین می‌خوانیم: «اگر p، آن‌گاه q و برعکس یا «p شرط لازم و کافی برای q است» یا «p اگر و تنها اگر q»

ارزش ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره درست یا ارزش هر دو نادرست باشد. در بقیهٔ حالات ارزش «$p \Leftrightarrow q$» نادرست است.

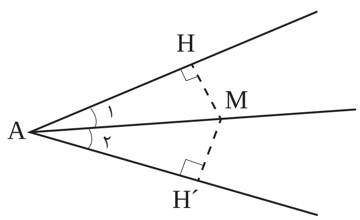
گزارهٔ شرطی «$p \Rightarrow q$» را در نظر بگیرید. در این صورت گزاره «$q \Rightarrow p$» را **عکس ترکیب شرطی**[18] می‌گوییم. اکنون می‌توان گفت که ترکیب دو شرطی «$p \Leftrightarrow q$» از ترکیب عطفی یک گزارهٔ شرطی و عکس آن به دست می‌آید، یعنی گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ همان ترکیب دو شرطی p با q است.

مثال: گزاره‌های زیر، نمونه‌ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌ها است.

الف. $x = 2 \Leftrightarrow 2x = 4$

ب. $x > 3 \Leftrightarrow 2x - 5 > 1$

ج. اگر فاصلهٔ یک نقطه از صفحه تا دو ضلع زاویه برابر باشد، آن‌گاه آن نقطه بر نیمساز آن زاویه واقع است و برعکس.



هم‌ارزی منطقی بین گزاره‌های مرکب

بین دو گزاره مرکب، هم‌ارزی منطقی[19] برقرار است؛ هرگاه ارزش دوگزارهٔ مرکب همواره مانند هم باشند، یعنی جدول‌های ارزش آن‌ها یکسان‌اند.

مثال. گزاره مرکب «$p \Rightarrow q$» را در نظر بگیرید، عکس نقیض آن به‌صورت «$\sim q \Rightarrow \sim p$» است. بین این دو گزاره مرکب هم‌ارزی منطقی برقرار است، در این حالت می‌نویسند:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

در زیر ملاحظه می‌کنید که جدول ارزش این دو گزاره یکسان هستند.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

در این‌جا تعدادی از هم‌ارزی‌های منطقی بین گزاره‌های

چه الفاظی محدوده یا قلمرو یک عبارت ریاضی را تعیین می‌کنند؟

عبارت‌های «به ازای هر»، «به ازای بعضی مقادیر» و «وجود ندارد هیچ مقداری» به سور معروف هستند

مرکب را می‌آوریم:

قوانین جابه‌جایی

$$۱)\begin{cases} p\vee q\equiv q\vee p \\ p\wedge q\equiv q\vee p \end{cases}$$

قوانین شرکت‌پذیری

$$۲)\begin{cases} (p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r) \\ (p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r) \end{cases}$$

قوانین توزیع‌پذیری

$$۳)\begin{cases} p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r) \\ p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r) \end{cases}$$

قوانین جذب

$$۴)\begin{cases} p\wedge(p\vee q)\equiv p \\ p\vee(p\wedge q)\equiv p \end{cases}$$

قوانین دمرگان

$\{(۰,۰),(-۳,-۳),(-\ ,\ ),(-۱,-۱)\}$

$$۵)\begin{cases} \sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q \\ \sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q \end{cases}$$

مثال: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} (x-y)(۲x+y+۳)=۰ \\ (x+y)(۲x-y+۱)=۰ \end{cases}$$

از معادلهٔ اول دستگاه نتیجه می‌گیریم که:

$$(x-y)(۲x+y+۳)=۰\Rightarrow(\underbrace{x-y=۰}_{p})\vee(\underbrace{۲x+y+۳=۰}_{q})$$

از معادلهٔ دوم دستگاه نتیجه می‌گیریم که:

$$(x+y)(۲x-y+۱)=۰\Rightarrow(\underbrace{x+y=۰}_{r})\vee(\underbrace{۲x-y+۱=۰}_{s})$$

بنابراین دستگاه بالا را می‌توان با زبان منطق ریاضی به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} p\vee q \\ \text{و} \\ r\vee s \end{cases}\equiv(p\vee q)\wedge(r\vee s)$$

$$\equiv[(p\vee q)\wedge r]\vee[(p\vee q)\wedge s]$$

$$\equiv(p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge s)\vee(q\wedge s)$$

با قانون توزیع‌پذیری، ملاحظه می‌کنیم که این دستگاه به چهار دستگاه زیر تبدیل می‌شود.

$$\left(\begin{cases} x-y=۰ \\ x+y=۰ \end{cases}\right)\vee\left(\begin{cases} ۲x+y+۳=۰ \\ x+y=۰ \end{cases}\right)$$

$$\vee\left(\begin{cases} x-y=۰ \\ ۲x-y+۱=۰ \end{cases}\right)\vee\left(\begin{cases} ۲x+y+۳=۰ \\ ۲x-y+۱=۰ \end{cases}\right)$$

جواب دستگاه‌ها را پیدا می‌کنیم، سپس اجتماع جواب‌های به‌دست آمده برابر با مجموعه جواب دستگاه است.

$$\begin{cases} x-y=۰ \\ x+y=۰ \end{cases}\Rightarrow x=۰, y=۰\Rightarrow D_۱=\{(۰,۰)\}$$

$$\begin{cases} ۲x+y+۳=۰ \\ x+y=۰ \end{cases}\Rightarrow x=-۳, y=۳\Rightarrow D_۲=\{(-۳,۳)\}$$

$$\begin{cases} x-y=۰ \\ ۲x-y+۱=۰ \end{cases}\Rightarrow x=-۱, y=-۱\Rightarrow D_۳=\{(-۱,-۱)\}$$

$$\begin{cases} ۲x+y+۳=۰ \\ ۲x-y+۱=۰ \end{cases}\Rightarrow x=-۱, y=-۱\Rightarrow D_۴=\{(-۱,-۱)\}$$

$$\Rightarrow D=D_۱\cup D_۲\cup D_۳\cup D_۴$$

$$=\{(۰,۰),(-۳,۳),(-۱,-۱)\}$$

سورها

به جملات زیر دقت کنید:

هر عدد زوج بر ۲ قابل قسمت است.

بعضی از اعداد اول زوج هستند.

هیچ عددی از خود آن عدد کوچک‌تر نیست.

عبارت‌های «به ازای هر»، «به ازای بعضی مقادیر» و «وجود ندارد هیچ مقداری» به **سور**[20] معروف هستند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره‌نماها قرار گیرند و به این وسیله، گزاره‌هایی به ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

سور کلمه‌ای عربی و به معنای «*بارو*»، حصار یا دیوار گرداگرد شهر است. نام گذاری عبارت‌های «به ازای هر»، «به ازای بعضی مقادیر» و «وجودندارد هیچ مقداری» با سور به این جهت است که آن‌ها قلمرو اعضای موضوع مورد بحث را مشخص می‌کنند.

از نظر منطق‌دانان وجه تشابه سور با دیوار شهر آن است که دیوار گرداگرد شهر، محدوده و قلمرو شهر را مشخص می‌کند و الفاظ به کار رفته در گزاره‌نماهای بالا، مرز و قلمرو اشیاء مورد استفاده در گزاره‌نماها را تعیین می‌کنند. برای مثال، وقتی می‌گوییم به ازای هر عدد صحیح مانند x داریم:

$$x^۲\geq x$$

یعنی متغیر x جزء قلمرو اعداد صحیح است و از محدودهٔ اعداد صحیح می‌توان به جای x، هر عدد دلخواهی را قرار داد تا این گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود.

کلمه سوره در قرآن کریم هم به همین معنا استفاده شده است. سوره از سور گرفته شده و به مجموعهٔ آیاتی گفته می‌شود که ابتدا و انتهای آن مشخص باشد.

سور عمومی

به عبارت‌های «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» که آن‌ها را با $\forall$ نمایش می‌دهیم، سور عمومی[21] می‌گوییم. عبارت «به ازای هر x» که آن را با $\forall x$ نمایش می‌دهیم، می‌تواند قبل از گزارهٔ نمایی شامل متغیر x قرار گیرد و به این وسیله گزاره‌ای با ارزش درست یا نادرست ایجاد کند، مانند:

$\forall x \in R : x^2 > 0$

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی بیان می‌شود فقط وقتی درست است که دامنهٔ متغیر و مجموعهٔ جواب گزاره‌نما با هم برابر باشند. باید توجه کرد که در این حالت ***سور عمومی، قلمرو دامنهٔ متغیر*** را مشخص می‌کند.

در گزارهٔ سوری:

$\forall x \in R : x^2 > 0$

دامنه متغیر آن توسط سور عمومی مشخص شده است، یعنی $D = \mathbb{R}$ و مجموعهٔ جواب آن $S = \mathbb{R} - \{0\}$ است. چون در این‌جا $S \neq D$، پس ارزش گزارهٔ سوری نادرست است.

مثال. ارزش گزارهٔ سوری زیر را تعیین کنید.

$\forall x \in \mathbb{R} : x - 2 < |x + 3|$

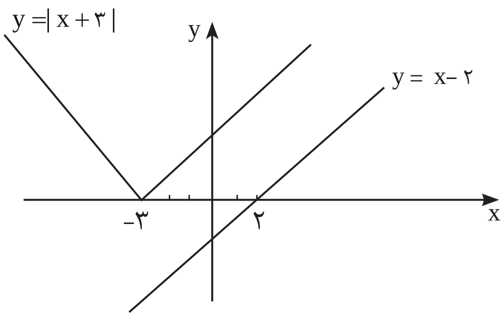
واضح است که $D = \mathbb{R}$. اکنون با حل نامعادله بالا، مجموعهٔ جواب را پیدا می‌کنیم. با توجه به تعریف قدرمطلق، نامعادلهٔ بالا را به صورت زیر در می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x - 2 < x + 3 \quad x \geq -3 \\ \text{یا} \\ x - 2 < -(x + 3) \quad x < -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \text{ و } x \geq -3 \Rightarrow S_1 = [-3, +\infty) \\ \text{یا} \\ x < \frac{-1}{2} \text{ و } x < -3 \Rightarrow S_2 = (-\infty, -3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$$

چون $D = S = \mathbb{R}$، پس ارزش گزارهٔ سوری درست است. برای تشخیص درستی این گزارهٔ سوری می‌توان از رسم نمودارهای دو تابع با ضابطه‌ای $y = x - 2$ و $y = |x + 3|$ به‌صورت زیر استفاده کرد.



(نمودار ۱)

با توجه به نمودار ۱ ملاحظه می‌کنیم که همواره به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = |x + 3|$ همواره بالای نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x - 2$ است، بنابراین به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، داریم $x + 2 < |x + 3|$، پس ارزش گزارهٔ سوری درست است.

تمرین

ارزش گزارهٔ سوری $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 2| < x + 3$ را تعیین کنید.

در شمارهٔ آینده، به‌معرفی و بحث دربارهٔ سور وجودی، سور صفر و نقیض سورها خواهیم پرداخت.

سوره از سور گرفته شده و به مجموعهٔ آیاتی گفته می‌شود که ابتدا و انتهای آن مشخص باشد

پی‌نوشت:

1. Logic symbol
2. De Morgan, Augustus
3. Boole, George
4. Russell, Bertrand
5. Statement
6. True
7. False
8. Pseddo-statement
9. Domain of variable
10. Answer set
11. Negative
12. Disjunctive
13. Conjunctive
14. Conditional
15. Odd
16. Even
17. Biconditional
18. Converse of a conditional composition
19. Logical equivalence
20. Quantifier
21. Universal quantifier

منابع:

۱. آنالیز ریاضی (جلد اول)، غلامحسین مصاحب، امیرکبیر، چاپ ششم ۱۳۶۳.
۲. فرهنگ ریاضیات، میرشهرام صدر و همکاران، انتشارات مدرسه، چاپ اول، ۱۳۷۹.
۳. دانش‌نامه ریاضی، میرشهرام صدر و همکاران، کانون فرهنگی آموزش، چاپ اول، ۱۳۹۰.