میرمحمود ابوالحسنی

به روش ضرب کشاورزان روسی

روشـی از ضرب وجود دارد که در گذشـته، کشاورزان روسـی از آن اسـتفاده می‌کردند. این روش به روش ضرب اتیوپیایی (کشور اتیوپی در افریقا) هم معروف است. سادگیِ اعجاب‌انگیـز، ویژگی این روش از ضرب اسـت. [۱] زیرا در این روش نیازی به دانستن جدول ضرب نیست، بلکه کافی است شما عمل جمع و دو برابر کردن و نصف‌کردن یک عدد طبیعی را بدانید.

در این‌جا فرض ما بر این اسـت که کشـاورزان روسـی اعداد اعشـاری را هم نمی‌شـناختند و لذا از مقدار اعشاری اعداد هنگام تقسیم صرف‌نظر می‌کردند:

مثال ۱

می‌خواهیم حاصل ضرب ۴۳×۹۲ را به‌دست آوریم:

ابتدا جدولی شـامل دو ردیف می‌سازیم و ۴۳ را در یک ردیف و ۹۲ را در ردیف دیگر جای می‌دهیم. یکی از ردیف‌ها را ردیف یک‌دوم‌ها و ردیف دیگر را ردیف دوبرابرها می‌نامیم. در هـر مرحله عـددی را که در ردیـف یک‌دوم‌ها قرار دارد نصـف و عددی را که در ردیف دوبرابرهـا قرار دارد دو برابر می‌کنیم.

در ردیـف یک دوم‌ها به این نکته توجه داریم که هرگاه عـدد فردی را نصف کنیم، باقی‌ماندهٔ آن ۱ خواهد بود که از آن صرف‌نظر می‌کنیم (تنها جزء صحیح نصف عدد را در نظر می‌گیریم؛ به‌عبارت دیگر خارج قسمت عدد را در تقسیم بر ۲ انتخاب و از باقی‌مانده صرف‌نظر می‌کنیم.) مثلاً در تقسیم ۴۳ بر ۲ به‌جای ۲۱/۵ عدد ۲۱ را می‌نویسیم.

ایـن روند را تا زمانی ادامه می‌دهیم که عدد ردیف یک دوم‌ها برابر با ۱ شـود. به این ترتیب در هر ردیف، به دنبال عدد اصلی، لیستی از اعداد نوشته می‌شود. [۲]

ردیف یک‌دوم ها

۹۲	۴۶	۲۳	۱۱	۵	۲	۱
۴۳	۸۶	۱۷۲	۳۴۴	۶۸۸	۱۳۷۶	۲۷۵۲

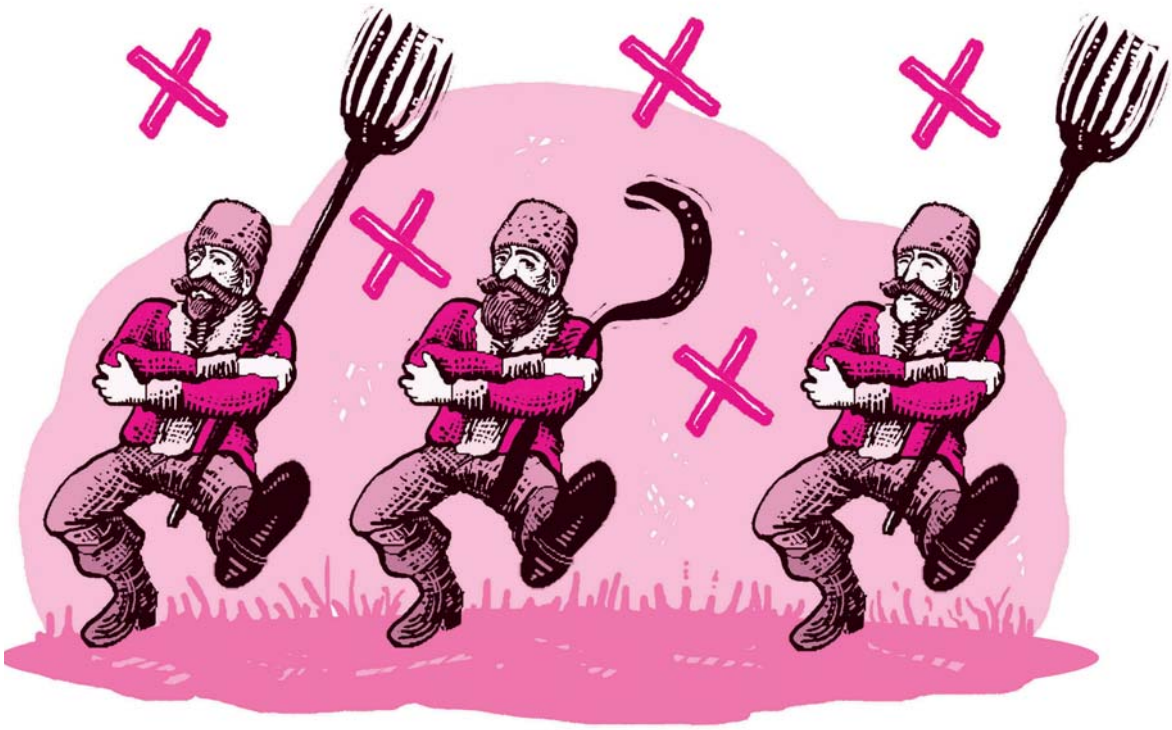
ردیف دو برابرها

در ایـن دو ردیف، هر دو عدد متناظر را «شـریک» هم می‌نامیم. مثلاً دو عدد ۵ و ۶۸۸ شریک یکدیگرند.

اکنون در ردیف یک‌دوم‌ها اعـداد فرد را جدا می‌کنیم. این اعداد در جدول زیر با دایره مشخص شده‌اند:

۹۲	۴۶	(۲۳)	(۱۱)	(۵)	۲	(۱)
۴۳	۸۶	(۱۷۲)	(۳۴۴)	(۶۸۸)	۱۳۷۶	(۲۷۵۲)

امـا ما با اعداد فـرد کاری نداریم، بلکه با شـریک‌های آن‌ها کار داریم و آن‌ها را با مسـتطیل مشـخص می‌کنیم.)



اکنـــون اگـــر شـــریک‌های اعـــداد فـــردِ ردیف یـــک دوم‌ها را بـــا هـــم جمـــع کنیـــم، حاصل‌ضـــرب مطلوب به‌دســـت می‌آید:

$۴۳\times۹۲=۱۷۲+۳۴۴+۶۸۸+۲۷۵۲=۳۹۵۶$

دقت داشته باشید! مهم نیست که کدام ردیف را ردیف یک‌دوم‌ها و کدام‌یک را ردیف دوبرابرها انتخاب کنیم. چون جدول زیر نشان می‌دهد که حاصل یکسان است:

۹۲	(۴۳)
۱۸۴	(۲۱)
۳۶۸	۱۰
۷۳۶	(۵)
۱۴۷۲	۲
۲۹۴۴	(۱)

$۴۳\times۹۲=۹۲+۱۸۴+۷۳۶+۲۹۴۴=۳۹۵۶$

جهت سهولت در عملیات و کوتاه‌کردن مراحل رسیدن بـــه جواب بهتر اســـت عدد کوچک‌تـــر را در ۲ ضرب و عدد بزرگ‌تر را بر ۲ تقسیم کنیم.

ســـؤالی که برای هر خواننده پیش می‌آید این است که کشاورزان روسی چگونه به این روش دست یافته‌اند؟

اینکه کشاورزان روسی چگونه به این روش ضرب دست یافته‌اند، کسی به‌درستی نمی‌داند ولی خوشبختانه ما اکنون سازوکار این روش را می‌دانیم.

جواب این ســـؤال در عددنویســـی در مبنـــای ۲ نهفته اســـت. برای آن‌هایی که با سیســـتم دودویی آشنا هستند، روش ضـــرب روســـتاییان روســـی را می‌تـــوان به‌صورت زیر بیان کـــرد. همان‌طور کـــه می‌دانیـــم $(۱۰۱۰۱۱)_۲=۴۳$ لذا داریم:

$$۴۳\times۹۲=(۱\times۲^۵+۰\times۲^۴+۱\times۲^۳+۰\times۲^۲+۱\times۲^۱+۱\times۲^۰)\times(۹۲)$$
$$=۹۲\times۲^۵+۹۲\times۲^۳+۹۲\times۲^۱+۹۲\times۲^۰$$
$$=۲۹۴۴+۷۳۶+۱۸۴+۹۲$$
$$=۳۹۵۶$$

مثال ۲

فرض کنیـــد می‌خواهید حاصل‌ضـــرب ۵۷۴۶×۳۷۹ را به‌دســـت آوریم: (در اینجا ما به جای ردیف، ستون تشکیل داده‌ایم.)

برای سهولت محاسبات عدد بزرگ‌تر یعنی ۵۷۴۶ را در ســـتون یک‌دوم‌ها و عدد کوچک‌تر یعنی ۳۷۹ را در ستون دوبرابرها می‌نویســـیم. اکنون در ستون یک‌دوم‌ها اعداد زوج را پیدا کرده و عدد مقابل آن‌ها را خط می‌زنیم.

ستون دوبرابرها ۳۷۹	۵۷۴۶ ستون یک‌دوم‌ها
۷۵۸	۲۸۷۳
~~۱۵۱۶~~	۱۴۳۶
~~۳۰۳۲~~	۷۱۸
۶۰۶۴	۳۵۹
۱۲۱۲۸	۱۷۹
۲۴۲۵۶	۸۹
~~۴۸۵۱۲~~	۴۴
~~۹۷۰۲۴~~	۲۲
۱۹۴۰۴۸	۱۱
۳۸۸۰۹۶	۵
~~۷۷۶۱۹۲~~	۲
۱۵۵۲۳۸۴	۱

برای به‌دست آوردن جواب ۳۷۹×۵۷۴۶ کافی است اعداد ستون دوبرابرها را که روی آن‌ها خط کشیده نشده است با هم جمع کنیم:

$$۳۷۹\times۵۷۴۶=۷۵۸+۶۰۶۴+۱۲۱۲۸+۲۴۲۵۶+۱۹۴۰۴۸+۳۸۸۰۹۶+۱۵۵۲۳۸۴=۲۱۷۷۷۳۴$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود جواب به‌دست آمده از روش ضرب روسی صحیح می‌باشد، مانند مثال قبلی اگر عدد ۵۷۴۶ را در مبنای ۲ بنویسیم خواهیم داشت ۱۰۱۱۱۰۰۱۱۰۱۱۱۰ به‌عبارت دیگر:

$$(۱۰۱۱۱۰۰۱۱۰۱۱۱۰)_۲=۱\times۲^{۱۲}+۰\times۲^{۱۱}+۱\times۲^{۱۰}+۱\times۲^{۹}+۰\times۲^{۸}+۰\times۲^{۷}+۱\times۲^{۶}+۱\times۲^{۵}+۰\times۲^{۴}+۱\times۲^{۳}+۱\times۲^{۲}+۱\times۲^{۱}+۰\times۲^{۰}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$۵۷۴۶\times۳۷۹=(۱\times۲^{۱۲}+۰\times۲^{۱۱}+۱\times۲^{۱۰}+۱\times۲^{۹}+۰\times۲^{۸}+۰\times۲^{۷}+۱\times۲^{۶}+۱\times۲^{۵}+۰\times۲^{۴}+۱\times۲^{۳}+۱\times۲^{۲}+۱\times۲^{۱}+۰\times۲^{۰})\times۳۷۹$$

با بسط ضرب فوق، ملاحظه می‌شود که جملاتی که مضرب صفر دارند در واقع همان مقادیری هستند که در ستون دوبرابرها حذف شده‌اند و مابقی مقادیر با هم جمع شده‌اند.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت که روش ضرب روسی یکی از کاربردهای عددنویسی در مبنای ۲ است و لذا برای ضرب هر دو عدد دلخواهی استفاده از این روش صحیح است.

روش ضرب روسی یکی از کاربردهای عددنویسی در مبنای ۲ است

راهنمایی برای اثبات

در صورتی‌که شما مایل به ارائه یک اثبات دقیق ریاضی برای روش ضرب روسی باشید می‌توانید از قضیه تقسیم اعداد صحیح و یکی از نتایج آن یعنی قضیه تغییر مبنا برای اعداد صحیح استفاده نمایید.

قضیه تقسیم: اگر a و $b>۰$ اعداد صحیح دلخواه باشند آن‌گاه اعداد صحیح و منحصر به‌فردی مانند q و r وجود دارند به‌طوری‌که:

$$a=bq+r \quad ۰\le r<|b|$$

قضیه تغییر مبنا: اگر a و $b>۰$ اعداد صحیح دلخواه باشند آن‌گاه اعداد صحیحی مانند:

$$۰\le r_i<b \quad i=۰,۱,...,k$$

وجود دارند به‌طوری‌که:

$$a=r_k b^k+r_{k-۱}b^{k-۱}+...+r_۱b^۱+r_۰$$

برای استفاده از این قضیه a را عددی در نظر بگیریم که در ستون یک‌دوم‌ها نوشته‌ایم و $b=۲$ و در نتیجه $r_i=۰$ یا $r_i=۱$ برای مقادیر $i=۰,۱,...,k$. [۳]

لذا می‌توانیم برای محاسبه حاصل‌ضرب $a\times c$ به‌جای a از

$$a=r_k ۲^k+r_{k-۱}۲^{k-۱}+...+r_۱۲^۱+r_۰$$

که در آن $r_i=۰$ یا $r_i=۱$ به ازای $i=۰,۱,...,k$، استفاده می‌کنیم.

برنامه‌نویسی الگوریتم روش ضرب کشاورزان روسی برای خوانندگانی که آشنایی با برنامه‌نویسی دارند، خالی از لطف نخواهد بود و با استفاده از آن می‌توانند درستی این روش را برای هر عدد دلخواه و بزرگی امتحان نمایند.

منابع:

1. http://en.wikipedia.org
2. www.sinuous83.com
3. **Introducation to Number Theory**
Larry Joel Goldstein
Publisher: Prentice Hall
(May 1976)