کمک آموزشی

مغالطه در استدلال

مجتبی رفیعی

مقدمه

«لقمان را گفتند: ادب از که آموختی؟ گفت: از بی ادبان! هرچه از کارهای ایشان در نظرم ناپسند آمد، از فعل آن پرهیز کردم.»

این حکایت گلستان را بارها شنیده یا خوانده‌ایم. در این مقاله، مصداقی از گفتهٔ لقمان را در مغالطه‌های ریاضی بررسی می‌کنیم. در ریاضیات ممکن است همه اشتباه کنند؛ اما اگر این اشتباه نتیجهٔ یک استدلال غلط باشد که در ظاهر درست به نظر می‌رسد، آن را «مغالطه» می گویند.

مغالطه از جمله موضوعات مهم و مسئله برانگیز به شمار می‌رود که در ایجاد انگیزه برای تفکر دقیق و در نتیجه توسعهٔ دانش و بالا بردن قدرت استدلال مفید است.

گاهی اوقات دانش‌آموزان در روند استدلال برای یک مسئله ممکن است سهواً اشتباه کنند به طوری که با نادیده گرفتن بعضی از تعاریف یا قضایا به نتیجه برسند که در این صورت هم یک مغالطه رخ داده است. اکنون چند مغالطه را بررسی می‌کنیم.

مغالطهٔ اول

اگر فرض کنیم(۱) $x=1$، در معادلهٔ زیر:

۱. $x^2 = x$

۲. $x^2 - 1 = x - 1$

۳. $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1}$

۴. $\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} \Rightarrow x+1=1$ (۲)

اگر در رابطهٔ (۲) به جای x عدد یک را قرار دهیم داریم:

$x+1=1 \underset{x=1}{\Rightarrow} 2=1$ غیرممکن است

به نظر شما اشتباه در کجا اتفاق افتاده است؟

مغالطهٔ دوم

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$$

ملاحظه می‌کنید که در اینجا ۱- با ۱ برابر شده است؛ اشتباه این مغالطه در کجاست؟

مغالطهٔ سوم

$$x = x^1 = x^{2\times\frac{1}{2}} = (x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2} = |x| \geq 0$$

ملاحظه می‌کنید که با این روش ثابت کردیم هر عدد حقیقی دلخواه همواره نامنفی است؛ چه اشتباهی روی داده است؟

مغالطهٔ چهارم

چون $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ در نتیجه داریم:

۱) $1 + \cos x = 1 + (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$

دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

۲) $(1+\cos x)^2 = (1 + (1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}})^2$

در حالت خاص، یعنی زمانی که $x = \pi$ است:

۳) $(1-1)^2 = (1 + (1-0)^{\frac{1}{2}})^2$

۴) $0 = (1+1)^2$

۵) $0 = 4$

ملاحظه می‌کنید که ۰=۴؛ اشتباه این مغالطه چیست؟

مغالطهٔ پنجم

در اتحاد دو جمله‌ای داریم:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{۱} a^{n-۱} b + \ldots + \binom{n}{n-۱} a\, b^{n-۱} + b^n$$

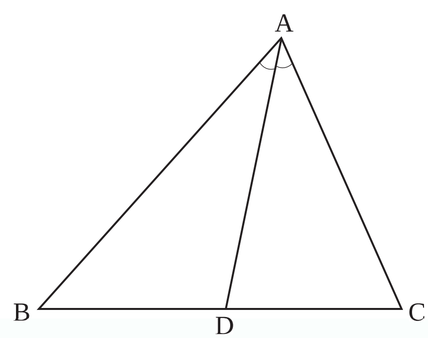
اگـر در ایــن رابطه قـرار دهیم $n = ۰$ در ایــن صورت: $(a+b)^۰ = ۱ , a^۰ = ۱ , b^۰ = ۱$ و تمـام جمله‌هـای سـمت راسـت غیر از دو جملهٔ اول و آخر، برابر با صفر می‌شوند؛ به این ترتیب:

$۱ = ۱ + ۰ + ... + ۰ + ۱ \Rightarrow ۱ = ۲$

پس $۲ = ۱$؛ اکنون اشـتباه در کدام قسمت اتفاق افتاده است؟

مغالطهٔ ششم

هر مثلثی متسـاوی الساقین اسـت! فرض کنید ABC مثلثی مفروض باشـد (شکل زیر) ثابت می‌کنیم AB با AC برابر است.



اگر نیمساز داخلی زاویهٔ A، BC را در D قطع کند آنگاه بنا بر قضیهٔ نیمساز زاویه داریم:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

اما

$$A\hat{D}B = A\hat{C}D + C\hat{A}D = C + \frac{۱}{۲}A$$

با توجه به قاعدهٔ سینوس‌ها در مثلث ADB، داریم:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{\sin BAD}{\sin ADB} = \frac{\sin\frac{A}{۲}}{\sin(C+\frac{A}{۲})} \qquad (۱)$$

از طرفی:

$$A\hat{D}C = A\hat{B}D + B\hat{A}D = B + \frac{A}{۲}$$

بنابراین:

$$\frac{DC}{AC} = \frac{\sin\frac{A}{۲}}{\sin(B+\frac{A}{۲})} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{\sin\frac{A}{۲}}{\sin(C+\frac{A}{۲})} = \frac{\sin\frac{A}{۲}}{\sin(B+\frac{A}{۲})} \quad (\sin\frac{A}{۲} \neq ۰)$$

پس:

$$\sin(C+\frac{A}{۲}) = \sin(B+\frac{A}{۲})$$

$$\Rightarrow C + \frac{A}{۲} = B + \frac{A}{۲} \Rightarrow B = C \Rightarrow AB = AC$$

بنابراین $A\overset{\Delta}{B}C$ متساوی الساقین است؛ اشتباه در کدام مرحله اتفاق افتاده است؟

۱. نکته در این اســت که تقســیم دو طرف هر معادله یا تســاوی بر $x-۱$ صحیح است اگر و فقط اگر $x-۱$ مخالف صفر باشد ولی در اینجا چنین نیست.

۲. در این مغالطه به تعریف و قضیه زیر توجه کنید.

تعریف: فرض کنید a عددی حقیقی و مثبت و r عددی گویا باشد. اگر

$$(m\in\mathbb{Z}\,,\,n\in\mathbb{N}\,,\,n\geq ۲)\ r=\frac{m}{n}$$

در این صورت:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

قضیه: اگر $a>۰\,,\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ آن‌گاه $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m'}{n'}}$

اشتباه اصلی در این مغالطه، گذر از مرحله توان یعنی $a^{\frac{m}{n}}$ به مرحلهٔ ریشه‌گیری یعنی $\sqrt[n]{a^m}$ است. که باید چهار شرط تعریــف را رعایــت کنیم $(m\in\mathbb{Z}\,,\,n\in\mathbb{N}\,,\,n\geq ۲,a>۰)$. زیرا در مجموعه اعداد حقیقی، عبارت منفی با نمای کسری تعریف نشده است.

۳. اشتباه این مغالطه با توجه به تعریف، در گذر از $x^{۲\times\frac{۱}{۲}}$ به $(x^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ اتفــاق می‌افتد که تنها بــه ازای $x\geq ۰$ این عمل درست است.

۴. معادلهٔ $x^۲=a^۲$ دارای دو پاســخ: $x=-a$ و $x=a$ اســت و برای پاسخ مناســب همواره باید احتیاط کرد. پس اشتباه در مرحلهٔ اول اتفاق افتاده است.

۵. قضیهٔ دو جمله‌ای، به ازای عددهای صحیح و مثبت، در $n=۱$ آغاز می‌شود و اثبات زمانی که $n=۰$ برقرار نیست.

۶. مرحلــه خطا از ســطر $\sin(C+\frac{A}{۲})=\sin(B+\frac{A}{۲})$ آغاز می‌شود. زیرا تساوی سینوس ضرورتاً به معنای تساوی زاویه‌ها نمی‌باشد.

تمرین

۱. آیا دو تابع $g(x)$ و $f(x)$ با هم برابرند؟

$$\begin{cases} f(x)=(x-۵)^{\frac{۱}{۳}} \\ g(x)=\sqrt[۳]{x-۵} \end{cases}$$

(**راهنمایی:** مقالهٔ «آیا $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ تعریف می‌شود؟» را در همین مجله مطالعه نمایید.)

۲. ایراد استدلال زیر را بیابید.

$$\begin{cases} \sqrt{-۴}\sqrt{-۹}=\sqrt{(-۴)(-۹)}=۶ \\ \sqrt{-۴}\sqrt{-۹}=\sqrt{(-۱)(۴)}\sqrt{(-۱)(۹)}(\sqrt{-۱})^۲\sqrt{۳۶}=-۱\times ۶=-۶ \end{cases}$$
$$\Rightarrow ۶=-۶$$

۳. اگر a و b دو عدد متمایز دلخواه باشند که مجموع آن‌ها برابر $۲c$ است:

$$a+b=۲c$$
$$\Rightarrow (a-b)(a+b)=(a-b)(۲c)$$
$$\Rightarrow a^۲-b^۲=۲ac-۲bc$$
$$\Rightarrow a^۲-b^۲+c^۲=۲ac-۲bc+c^۲$$
$$\Rightarrow a^۲-۲ac+c^۲=b^۲-۲bc+c^۲$$
$$\Rightarrow (a-c)^۲=(b-c)^۲$$
$$\Rightarrow a-c=b-c\Rightarrow a=b$$

بگویید چرا خلاف شرط مسئله، a و b متمایز نشدند؟

۴. در اینجا داریم:

$$S=۱-۱+۱-۱+۱-۱+\dots$$

حال اگر آن‌ها را دسته بندی کنیم خواهیم داشت:

$$S=(۱-۱)+(۱-۱)+(۱-۱)+.$$
$$=۰+۰+\dots$$
$$=۰\quad(۱)$$

و به صورت دیگری دسته بندی کنیم خواهیم داشت:

$$S=۱-(۱-۱)-(۱-۱)-(۱-۱)-.$$
$$=۱-۰-۰-۰$$
$$=۱\quad(۲)$$
$$(۱),(۲)\Rightarrow ۱=۰$$

چرا برای حاصل جمع S دو جواب به‌دست می‌آید؟

پاسخ این تمرین‌ها را برای مجله ارسال کنید.

منابع:

۱. آنالیز ریاضی / غلامحسین مصاحب ـ تهران: امیر کبیر، ۱۳۷۹.

۲. نخستین گام‌ها در المپیادهای ریاضی / ترجمه و تدوین ابراهیم دارابی. ـ تهران: پیشروان: مبتکران، ۱۳۷۶.

۳. مغالطه‌های ریاضی / تألیف ئی.ای. ماکسول؛ ترجمه غلامرضا یاسی پور. ـ تهران: محراب قلم، ۱۳۷۹.

4. Mathematical fallacies and paradoxes / Bryan Bunch. Originally published: New York. Van Nostrand Reinhold co.c1982