

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی:	تعداد صفحه: ۲	ساعت شروع: ۱۰ صبح
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	رشته: ریاضی فیزیک	تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۷		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	نمره
------	------

۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. (الف) اگر $k$ حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $k + 1$ مربع کامل است. (ب) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند. (ج) گراف حاصل از مدل سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است. (د) گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.	۱
۲	اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.	۱/۲۵
۳	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: (برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$ داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ )	۱
۴	اگر $a > 1$ و $a + 4 \mid 9k$ و $a + 3 \mid 5k$ ثابت کنید $a$ عددی اول است.	۱
۵	پاسخ هر یک از سوالات زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. (الف) اگر $a$ عددی صحیح و فرد باشد و $a + 2 \mid b$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ را بر ۸ بیابید. (ب) مطلوبست باقی مانده تقسیم عدد $10 + 12 \times (1000)^3 = A$ بر عدد ۷.	۲/۲۵
۶	معادله همنهشتی $3^x \equiv 13 \pmod{7}$ را حل و جواب عمومی آن را بدست آورید.	۱
۷	با توجه به گراف $G$ (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید. (الف) یک $a - c$ مسیر به طول ۳ بنویسید. (ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. (ج) درجه رأس $a$ در گراف $G$ را تعیین کنید. (د) آیا گراف $G$ همبند است؟ چرا؟ (ه) یک زیرگراف تهی ۵ رأسی، از گراف $G$ رسم کنید.	۱/۵
۸	ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱
۹	گراف $G$ با مجموعه رأسهای $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه یال های $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت های (الف) تا (ج) پاسخ دهید. (الف) مجموعه همسایگی باز رأس $d$ را بنویسید. (ب) اندازه گراف را مشخص کنید. (ج) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟	۱

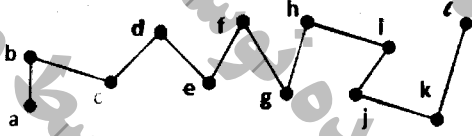
ادامه سوالات در صفحه دوم

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی:	تعداد صفحه: ۲	ساعت شروع: ۱۰ صبح
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	رشته: ریاضی فیزیک	تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۷		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	نمره
۱۰	۱
۱۱	۱
۱۲	۱
۱۳	۱
۱۴	۱/۵
۱۵	۲
۱۶	۱/۵
جمع نمره ۲۰	

۱۰. گراف کامل  $K_p$  دارای ۳۶ یال است در این گراف، مرتبه گراف و  $\Delta(G)$  را مشخص کنید.

۱۱. گراف  $(P_{12})$  در شکل مقابل رسم شده است.



الف) یک  $\gamma$ -مجموعه از آن را مشخص کنید.  
ب) یک مجموعه احاطه گرمینمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.

۱۲. اگر داشته باشیم  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند کد یا رمز ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم (متمايز) از  $A$  و سه رقم (متمايز) از  $B$  باشد؟

۱۳. به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۱۴. دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.

۱۵. به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود)

۱۶. حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کبیسه در نظر بگیرید)

"موفق باشید"

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته
تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۷	
ردیف	راهنمای تصحیح		
۱	الف) درست (۰/۲۵)    ب) درست (۰/۲۵)    ج) نادرست (۰/۲۵)    د) درست (۰/۲۵) (صفحات: ۳ و ۱۶ و ۳۶ و ۴۲)		
۲	اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. (۰/۲۵) از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. (۰/۲۵) می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست در نتیجه: $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in Q$ (۰/۲۵) اما با توجه به فرض مسئله: $\beta$ گنگ است (۰/۲۵) با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵) (صفحه: ۸)		
۳	$\underbrace{2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2)}_{(۰/۲۵)} \geq 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (۰/۲۵)$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0, (y-1)^2 \geq 0, (x-y)^2 \geq 0 \quad (۰/۲۵)$ (صفحه: ۸)		
۴	$\begin{aligned} a \mid 9k + 4 &\Rightarrow a \mid 45k + 20 \quad (۰/۲۵) \\ a \mid 5k + 3 &\Rightarrow a \mid 45k + 27 \quad (۰/۲۵) \end{aligned} \Rightarrow a \mid 7 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow a = 7 \quad (۰/۲۵)$ (صفحه: ۱۶)		
۵	الف) $a$ عددی فرد است بنابراین $a+2$ عددی فرد است و $b \mid a+2$ ، بنابراین $b$ نیز عددی فرد خواهد بود. (۰/۲۵) می‌دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ به علاوه یک است. (۰/۲۵) $a^2 + b^2 + 3 = (\lambda m + 1) + (\lambda n + 1) + 3 = \lambda(m+n) + 5 \Rightarrow r = 5 \quad (۰/۲۵)$ $\Leftrightarrow (1000)^2 \equiv 6^2 \equiv -1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow (1000)^2 \times 12 + 10 \equiv -12 + 10 \quad (۰/۲۵)$ $\Rightarrow (1000)^2 \times 12 + 10 \equiv -2 \equiv 5 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow r = 5 \quad (۰/۲۵)$ (صفحات: ۱۶ و ۲۱)		
۶	$3x \equiv 13 \Rightarrow 3x \equiv 6 \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{(3,7)=1} x \equiv 2 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x = 7k + 2 \quad (۰/۲۵)$ (صفحه: ۲۵)		

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸		
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۷		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		
ردیف	راهنمای تصحیح			
۷	الف) $abgc$ (۰/۲۵)    ب) $bcdgb$ (۰/۲۵)    ج) $\deg_G(a) = 5$ (۰/۲۵)	د) خیر - چون مثلاً از $f$ به $a$ مسیری وجود ندارد. (۰/۵)		
۱/۵	هـ) $a \cdot b \cdot c$ $f \cdot g$ (۰/۲۵)			
۸	فرض کنیم $G$ یک گراف و $A$ مجموعه همه رئوس فرد گراف $G$ و $B$ مجموعه همه رئوس زوج گراف $G$ باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ (۰/۲۵)			
۱	از طرفی می دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف $G$ عددی زوج است یعنی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ زوج (۰/۲۵) و $\sum_{v \in B} \deg(v)$ زوج است بنابراین تفاضل آنها نیز زوج خواهد شد. (۰/۲۵)			
۱	بنابراین $\sum_{v \in A} \deg(v)$ زوج و نتیجه می شود که $n(A)$ عددی زوج است. (۰/۲۵) (صفحه: ۳۰)			
۹	الف) $N_G(d) = \{b, e\}$ (۰/۵)    ب) $q = 6$ (۰/۲۵)    ج) مجموع درجات رئوس $= 12$ (۰/۲۵)	(صفحه: ۴۱)		
۱۰	$q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36$ (۰/۲۵) (صفحه: ۴۲)			
۱	$\Rightarrow p = 9$ (۰/۲۵) , $\Delta(G) = p - 1 = 8$ (۰/۲۵)			
۱۱	الف) $\{b, e, h, k\}$ (۰/۵)    ب) $\{a, c, e, g, i, k\}$ (۰/۵)	(صفحه: ۵۴)		
۱۲	$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times \frac{5!}{2} = 7200$ (۰/۲۵) (صفحه: ۷۲)			
۱۳	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ (۰/۲۵) $x_i \geq 1, i = 1, 2, 3, 4$ (۰/۲۵)			
۱	$\Rightarrow \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$ (۰/۵) (صفحه: ۷۳)			

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه																																	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸																																			
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۷		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir																																			
ردیف	راهنمای تصحیح			نمره																																	
۱۴	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">•</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">→</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲۳</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱۱</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳۲</td> </tr> </table> <p>(صفحه: ۷۳)</p>			۱	۳	۲	•	۲	۱	۳	→	۱۲	۳۱	۲۳	۳	۲	۱		۳	۲	۱		۳۳	۲۲	۱۱	۲	۱	۳		۱	۳	۲		۲۱	۱۳	۳۲	۱/۵
۱	۳	۲	•	۲	۱	۳	→	۱۲	۳۱	۲۳																											
۳	۲	۱		۳	۲	۱		۳۳	۲۲	۱۱																											
۲	۱	۳		۱	۳	۲		۲۱	۱۳	۳۲																											
۱۵	<p>تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه ۳ عضوی مانند B.</p> <p><math>A_i = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3\}</math> (۰/۲۵)</p> <p><math> S  =  B ^{ A } = 3^4 = 81</math> (۰/۲۵), <math> A_1  =  A_2  =  A_3  = 2^4 = 16</math> (۰/۲۵)</p> <p><math> A_1 \cap A_2  =  A_1 \cap A_3  =  A_2 \cap A_3  = 1</math> (۰/۲۵), <math> A_1 \cap A_2 \cap A_3  = 0</math> (۰/۲۵),</p> <p><math> \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3  =  \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}  =  S  -  A_1 \cup A_2 \cup A_3  = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36</math> (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p> <p>(صفحات: ۷۸ و ۷۹)</p>			۲																																	
۱۶	<p><math>k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19</math> (۰/۵)</p> <p>طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می‌باشد. <math>n = 365</math> (۰/۵)</p> <p>بنابراین تعداد کبوترها برابر است با <math>kn + 1 = 365 \times 19 + 1 = 6936</math> (۰/۵)</p> <p>(صفحه: ۸۴)</p>			۱/۵																																	

«مصححین گرامی لطفاً برای راه حل‌های دیگر بارم را به تناسب تقسیم نمایید.»