

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی ایران

ویژه دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان

۷ بهمن ماه ۱۳۸۴ (ساعت ۹ تا ۱۳)

تاریخ ۷ / ۱۱ / ۱۳۸۴، مدت آزمون: ۲۴۰ دقیقه، کد برگه ی سؤالات: ۳

تعداد سؤالات: ۳۰

۱) الگوریتم زیر را روی چندجمله ای $P(x)$ اجرا کرده ایم.

۱. d را برابر درجه P قرار بده و اگر $d < 1$ به سطر ۴ برو.

۲. a را برابر ضریب x^d در P قرار بده و $P(x) - ax^{d-1}(x+2)$ را به جای $P(x)$ بگذار.

۳. به سطر ۱ برو.

۴. P را چاپ کن!

پس از اجرای الگوریتم عدد ۱۳۸۴ چاپ شده است. P در آغاز کدام بوده است؟

الف) $x^{11} - 45x^3$

ب) $13x^7 - 2$

ج) $x^{11} - 83x^3$

د) $16x^4 + x$

ه) $-x^{11} + 84$

۲) شازده کوچولو، روی سیاره کوچکی زندگی می کند که شعاعش ۶۰ متر است. روزی با شروع از روی خط استوا، 30π متر به شرق، 20π متر به شمال، 30π متر به غرب و سرانجام 20π متر به جنوب می رود. شازده کوچولو تا مکان اولش چند متر فاصله دارد؟



الف) صفر

ب) 30π

ج) 20π

د) 40π

ه) 15π

۳) چند سه تایی طبیعی $10 \leq x < y < z$ وجود دارد که $x+y=z$ ؟

- الف) ۱۵ ب) ۲۰ ج) ۴۰ د) ۴۵ ه) ۵۰

۴) ضرایب چند جمله ای P صحیح است. تحت کدام یک از شرایط زیر P نمی تواند ریشه ی صحیح داشته باشد؟

- الف) $p(5)=5$ و $p(6)=6$ ب) $p(5)=5$ و $p(6)=5$ ج) $P(5)=6$ و $P(6)=6$

- د) $P(5)=6$ و $P(6)=5$ ه) تحت هر کدام از این شرایط، P می تواند ریشه ی صحیح داشته باشد.

۵) به ازای چند عدد طبیعی مانند m حاصل $\sqrt{m-1} + \sqrt{m+15}$ صحیح است؟

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی نهایت

۶) از شهر A جاده ای مستقیم خارج شده است که دو شهر B و C در دو طرفش قرار دارند. مجموع فاصله دو شهر B و C از جاده حداکثر چند کیلومتر است؟ می دانیم که فاصله شهر A از دو شهر دیگر 60 و 50 کیلومتر و فاصله دو شهر B و C از هم 40 کیلومتر است.

- الف) ۳۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ ه) ۷۰

۷) کدام یک از مجموعه های زیر نسبت به ضرب بسته است؟ اعداد طبیعی ای که یکانشان در بسط مبنای

- الف) چهار، ۱ یا ۲ یا ۳ است. ب) پنج، ۱ یا ۲ یا ۴ است. ج) هفت، ۱ یا ۲ یا ۴ است.

- د) نه، ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ است. ه) ده، ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۵ است.

۸) مستطیلی در صفحه با رئوس $(0,0)$ ، $(100,0)$ ، $(150,0)$ و $(150,100)$ در نظر بگیرید. چند خط موازی با قطر گذرا از رأس $(0,0)$ اضلاع مستطیل را در دو نقطه متمایز با مختصات صحیح قطع می کند؟ قطر را هم بشمارید.

- الف) ۹۹ ب) ۱۰۰ ج) ۱۹۹ د) ۲۰۰ ه) ۳۰۰

۹) دوربینی زیر یک هواپیما نصب شده است. هواپیما روی مسیری خطی در حال اوج گیری است. زمین را مسطح فرض کنید. مساحت فیلم برداری شده، تابع درجه ی چندی از جابجایی مکانی هواپیما است؟

- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) چندجمله ای نیست.

۱۰) نیم سازه های داخلی مثلث ABC دایره محیطی آن را در نقاط A', B' و C' قطع می کنند. اگر I' مرکز دایره محاطی داخلی مثلث A'B'C' باشد، اندازه <B'I'C' برابر کدام گزینه است؟

- الف) $90^\circ + \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{4}$ (ب) $180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{4}$ (ج) $2A + B - C$ (د) $180^\circ - A$ (ه) $2A$

۱۱) فرض کنید $(2 + \sqrt{3})^n = 5042 + b\sqrt{3}$ که در آن n عددی طبیعی و b صحیح است. b چند است؟

- الف) ۱۳۸۴ (ب) ۳۵۴۳ (ج) ۷۸۰ (د) ۵۸۲۲ (ه) ۲۹۱۱

۱۲) تصاعد حسابی از اعداد اول با قدر نسبت $n+1$ ، که n عدد طبیعی است حداکثر چند عضو دارد؟

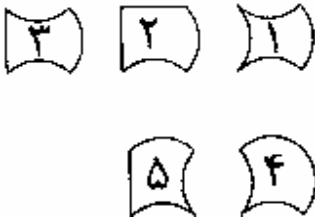
- الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) تصاعد با هر تعداد عضو وجود دارد.

۱۳) اگر a، b و c اعدادی حقیقی باشند که $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ، مجموعه همه مقادیر ممکن ab+bc+ca زیرمجموعه کدام یک از بازه

های زیر است؟

- الف) $[0, 2]$ (ب) $[-1, 0]$ (ج) $[0, 1]$ (د) $[-2, \frac{1}{2}]$ (ه) $[\frac{-1}{2}, 2]$

۱۴) هر یک از کاشی های روبرو با اضافه و یا کم کردن قطاعی از دایره به مربع 1×1 به دست آمده است. هر کدام از این کاشی ها را «صفحه پر کن» می گوئیم اگر بتوان با آن صفحه نامتناهی شبکه بندی شده را پوشاند؛ هر کاشی را می توان 90° درجه و 180° درجه دوران داد و آن را پشت و رو کرد. البته کاشی باید طوری در صفحه قرار داده شود که چهار گوشه آن روی نقاط شبکه قرار گیرد. کدام یک از کاشی ها صفحه پر کن هستند؟



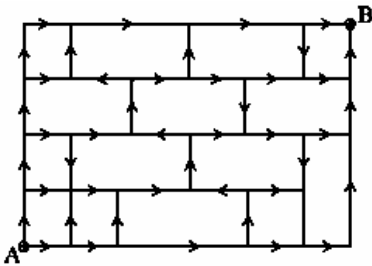
الف) ۱ و ۵ ب) ۲ و ۴ و ۵ ج) ۲ و ۳ و ۵ د) ۳ و ۴ ه) ۲ و ۴

۱۵) در مثلث ABC نقطه D محل برخورد نیم ساز زاویه A با ضلع BC و نقطه E محل تماس دایره محاطی داخلی با ضلع BC است. اگر $BE=ED$ ، کدام گزینه صحیح است؟

الف) $3A+2C=180^\circ$ ب) $2A+3C=180^\circ$ ج) $B-C=90^\circ$

د) $2B+C=180^\circ$ ه) $B=2C$

۱۶) در شکل روبرو می خواهیم از نقطه A به نقطه B برویم. مسیرها در جهت فلش یک طرفه هستند. به چند طریق می توانیم این کار را انجام دهیم؟



الف) ۳۷ ب) ۵۸ ج) ۱۲ د) ۶۳ ه) ۶۴

۱۷) طول یال مکعبی یک واحد است. اگر A ، B و C رأس های مجاور به رأس D باشند، کم ترین مقدار مجموع مربعات فاصله

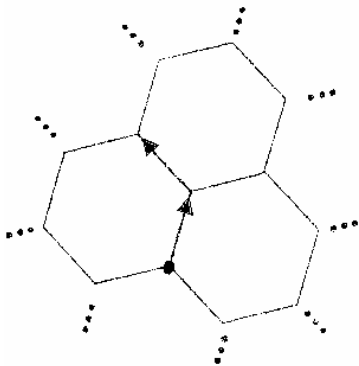
نقطه دلخواه P از خطوط AB ، BC و CA چقدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) $\frac{3}{4}$ ه) $\frac{1}{4}$

۱۸) کدام بزرگ تر است؟

الف) 2^{431} ب) 3^{421} ج) 4^{321} د) 21^{43} ه) 31^{42}

۱۹) کندوی زنبوری از شش ضلعی های منتظم با طول واحد تشکیل شده است. بچه زنبوری روی اضلاع حرکت می کند و به هر رأسی که می رسد می تواند به سمت چپ یا راست خود برود. اگر این زنبور ۱ بار به چپ، ۲ بار به راست، ۴ بار به چپ، ... و 2^{1384} بار به چپ برود، فاصله ی مکان نهایی او از ابتدای حرکتش چند واحد است؟



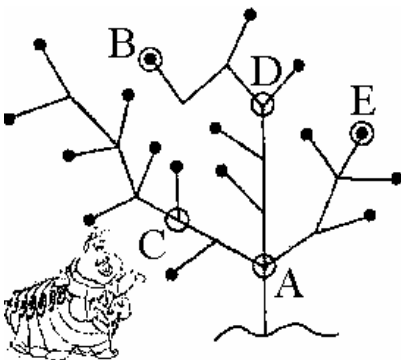
الف) بین صفر و 2^5 ب) بین 2^{10} و 2^5 ج) بین 2^{10} و 2^{15}

د) بین 2^{15} و 2^{20} ه) بین 2^{1384} و 2^{1385}

۲۰) می خواهیم برای سه روستا به فاصله دو به دو ۹، ۱۴ و ۱۹ کیلومتر، مدرسه ای بسازیم. کم ترین مقدار a که بتوان مدرسه را جایی ساخت که فاصله اش از هر سه روستا بیش از a کیلومتر نباشد چند است؟

الف) ۹ ب) $9/5$ ج) $2\sqrt{2}$ د) $\frac{52\sqrt{2}}{8}$ ه) ۱۰

۲۱) کرمی شکمو می خواهد همه میوه های درخت روبرو را بخورد و در عین حال مسافتی که روی شاخه ها طی می کند، کم ترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید کرم می تواند مکان خود را برای شروع انتخاب کند. کدام نقطه بهتر است؟ فاصله بین دو نقطه متوالی روی درخت یک متر است و تمام شاخه های انتهایی، میوه دارند. میوه ها با دایره سیاه توپر مشخص شده اند.



الف) A ب) B ج) C د) D ه) E

۲۲) بسط مبنای ۲- را با استفاده از ارقام صفر و یک، شبیه بسط مبنای ۲ تعریف می کنیم. مثلاً

$$(101)_{-2} = 1 \times (-2)^2 + 0 \times (-2)^1 + 1 \times (-2)^0 = 5$$

۱۱۷ در مبنای ۲- چند تا یک دارد؟ (توجه کنید گذاشتن علامت منفی، مثلاً $(101)_{-2}$ ، مجاز نیست.)

۲ (الف) ۴ (ب) ۶ (ج) ۱۱۷ (د) بسط مبنای ۲- ندارد.

۱۱۷ (ه) بیش تر از یک بسط در مبنای ۲- دارد.

۲۳) *، عملی روی اعداد صحیح است با این خاصیت که جابجایی و شرکت پذیر است ولی روی جمع پخش نمی شود. به جای آن برای هر a, b, c و صحیح $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)-a$ می دانیم که $۱*۱=۳$. در این صورت $۱۰*۱۰$ چند است؟

الف) ۱۰۰ (ب) ۱۰۲ (ج) ۱۲۰ (د) ۲۵۰ (ه) ۳۰۰

۲۴) دو نفر با هم مشاعره می کنند؛ اولی بیتی از اشعار روبرو را می خواند و دومی باید بیت جدیدی بگوید که با حرف آخر بیت قبلی شروع شده باشد. چند بیت وجود دارد که با شروع از آن ها نفر اول می تواند مستقل از بازی نفر دوم برنده شود؟ کسی است که نتواند شعری بخواند.

این سر به مهر نامه بدان مهربان رسان	کس را خبر مکن که کجا می فرستم
نور تویی سور تویی دولت منصور تویی	مرغ که طور تویی خسته به منقار مرا
ای پادشه خوبان داد از غم تنهایی	دل بی تو به جان آمد وقت است که بازآیی
نابرده رنج گنج میسر نمی شود	مزد آن گرفت جان برادر که کار کرد
درخت تو گر بار دانش بگیرد	به زیر آوری چرخ نیلوفری را
تا توانی دلی به دست آور	دل شکستن هنر نمی باشد
یعقوب وار وا اسفاها همی زخم	دیدار خوب یوسف کنعانم آرزوست
تا نگردی بی خیر از جسم و جان	کی خیر یابی ز جانان یک زمان
یار شو و یار بین دل شو و دل دار بین	در پی سرو روان چشمه و گلزار بین
دوست آن باشد که گیرد دست دوست	در پریشان حالی و درماندگی

الف) صفر (ب) ۲ (ج) ۵ (د) ۸ (ه) ۱۰

۲۵) در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع BC و نقطه E محل تماس دایره محاطی مثلث با ضلع BC است. اگر نقطه L وسط AM

و K محل برخورد AE با BL باشد و بین اضلاع مثلث رابطه $2(AC-AB)=BC$ باشد، آن گاه $\frac{AK}{AE}$ کدام است؟

- الف) ۱ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) $\frac{1}{2}$ ه) $\frac{3}{4}$

۲۶) A, B و C سه زیرمجموعه دلخواه مجموعه دلخواه اعداد طبیعی هستند. با دو عمل اجتماع و مکمل، حداکثر چند مجموعه مختلف می توان ساخت؟

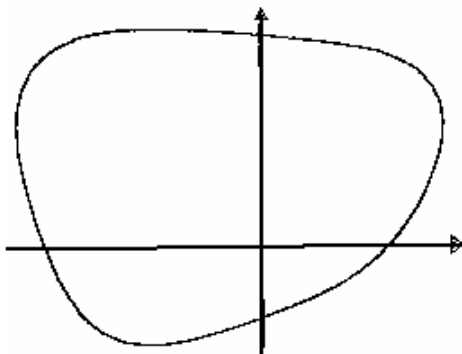
- الف) ۷ ب) ۸ ج) ۱۸ د) ۱۲۸ ه) ۲۵۶

۲۷) در افسانه ها آمده است وقتی پادشاه هند می خواست به مخترع شطرنج پاداش دهد، طرف در دیزی را باز دید (!) و خواست به ازای خانه اول شطرنج یک دانه گندم، به ازای خانه دوم، دو دانه گندم و به همین ترتیب برای هر خانه ای، دو برابر خانه قبل به او گندم داده شود. فرض کنید خانه های صفحه شطرنج مانند شکل روبرو شماره گذاری شده اند. چه کسری از کل گندم ها به ازای خانه های سفید درخواست شده است؟ (جواب تا دو رقم اعشار است.)



- الف) $\frac{23}{50}$ ب) $\frac{50}{50}$ ج) $\frac{99}{50}$ د) $\frac{75}{50}$ ه) هیچ کدام

۲۸) شکل روبرو مجموعه جواب های کدام یک از معادلات زیر در صفحه است؟



الف) $x^2+xy+y^2=4$

ب) $\cos x+x^2+y^2+y=2$

ج) $x^2y^2+xy^2+y=1$

د) $x^2+y^2=2y-x+1$

ه) $\sin(x+y)+\sin x+\sin y=1$

۲۹) خانه های یک مستطیل 4×5 را می خواهیم با چهار رنگ طوری رنگ کنیم که در هر مربع 2×2 ، هر چهار رنگ ظاهر شوند. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

الف) ۱۲۰

ب) ۱۹۲

ج) ۲۴

د) ۲۶۴

ه) ۲۸۸

۳۰) فاصله مرکز های دو دایره به شعاع $\sqrt{2}$ ، برابر ۴ است. نقاطی را در نظر بگیرید که خارج دو دایره هستند و هر خط گذرنده از آن نقاط، دست کم یکی از دو دایره را قطع می کند. مساحت این مجموعه چقدر است؟

الف) صفر

ب) $2\pi - \sqrt{2}$

ج) $4\pi - 2\sqrt{2}$

د) $2\sqrt{2} - \pi$

ه) $4\sqrt{2} - 2\pi$