

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد ریاضی ایران

۱۰ بهمن ۱۳۸۲

(۱) معادله ی زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(x+1)^{1383} + (x+1)^{1382}(x-2) + (x+1)^{1381}(x-2)^2 + \dots + (x+1)(x-2)^{1382} + (x-2)^{1383} = 0$$

(الف) این عبارت همواره صفر است. (ب) ۲ (ج) ۱۳۸۳ (د) ۰ (ه) ۱

(۲) A ، B ، و C سه مجموعه ی دل خواه اند و از سطر دوم به بعد، تفاضل دو مجموعه ی بالای سر خودش است. (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً $D=A-B$ ، کدام گزینه حتما درست است؟

A	B	C
D	E	
	F	

(ج) $F \subseteq A \cap C$

(ب) $B \subseteq F$

(الف) $F \subseteq C$

(ه) $D \cap C \subseteq F$

(د) $A \cap C \subseteq F$

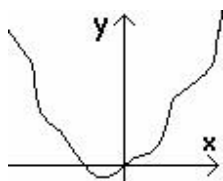
(۳) ضریب x^5 در چند جمله ای $(1+x^4+x^8)^2(1+x^{1382}x^{1381}+x^{1382}x^2+\dots+x^{1382}x^2+x^{1382})^2$ چند است؟

(الف) ۲۰ (ب) ۳۲ (ج) ۴۰ (د) ۶۴ (ه) ۷۰

(۴) چند جمله ای x^2+ax+1 بر x^3-x+b بخشپذیر است. $a+2b$ را بیابید.

(الف) -۸ (ب) $-\frac{25}{3}$ (ج) ۱ (د) ۰ (ه) -۳

۵) نمودار روبرو مربوط به کدام یک از توابع زیر است ؟



$$y = \cos\left(\frac{x^2}{10}\right) - 1 \quad (\text{ج})$$

$$y = \frac{(\tan x)^2}{10} \quad (\text{ب})$$

$$y = \frac{x^2}{10} \sin x \quad (\text{الف})$$

$$y = \frac{x^2}{10} + \sin x \quad (\text{ه})$$

$$y = \frac{x^2}{10} + \cos x - 1 \quad (\text{د})$$

۶) تابع دو متغیره ی f به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x,y) = y^2 - x^2 - 2xy + 2x + 1$$

ناصر و منصور به این شکل با هم بازی می کنند که ابتدا ناصر یک عدد به جای x می گذارد و سپس منصور یک عدد به جای y قرار می دهد و مقدار تابع، هر چقدر که شد به عنوان امتیاز ناصر در نظر گرفته می شود. اگر منصور خوب بازی کند بیشترین امتیازی که ناصر می تواند به دست آورد چقدر است؟

$$-\sqrt{2} \quad (\text{ه})$$

$$-1 \quad (\text{د})$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{5}{3} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{3}{2} \quad (\text{الف})$$

۷) A و B ماتریس هایی 2×2 به شکل زیر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix}$$

چه موقع رابطه ی $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ برقرار است؟

$$x=y \quad (\text{ج}) \text{ وقتی}$$

$$x+y=0 \quad (\text{ب}) \text{ وقتی}$$

$$\text{همواره} \quad (\text{الف})$$

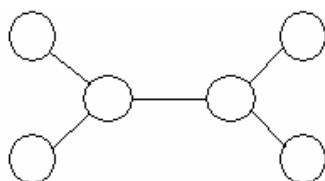
$$\text{هیچ گاه} \quad (\text{ه})$$

$$xy=1 \quad (\text{د}) \text{ وقتی}$$

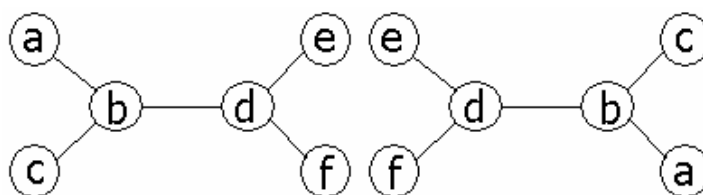
۸) برای عدد طبیعی n فرض کنید $p(n)$ حاصل ضرب ارقام n در مبنای ۱۰ باشد. $P(1) + \dots + p(999)$ چند است؟

الف) ۱۱۲۵۷۶ (ب) ۲۰۷۰ (ج) ۹۱۱۲۵ (د) ۹۳۱۹۵ (ه) ۱۳۲۰۷۰

۹) می‌خواهیم در دایره‌های شکل رو برو برچسب‌های a, b, c, d, e, f را بچسبانیم طوری که حروف واقع در هیچ دو دایره‌ای برابر نباشند.



دو برچسب‌گذاری را متمایز گوییم هر گاه دو حرف وجود داشته باشند که دایره‌های شامل این دو حرف در یکی مجاور و در دیگری غیر مجاور باشند (دو دایره را مجاور گوییم هر گاه بین آن‌ها پاره خطی رسم شده باشد). مثلاً برچسب‌گذاری‌های زیر یکسانند.



چند برچسب‌گذاری متمایز وجود دارد؟

الف) ۱۸۰ (ب) ۱۲۰ (ج) ۹۰ (د) ۶۰ (ه) ۴۵

۱۰) حداقل چند مستطیل 2×3 باید از یک صفحه‌ی شطرنجی 8×8 جدا شود تا دیگر حتی یک مستطیل 2×3 نتوان از شکل باقی مانده جدا کرد؟

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

۱۱) یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک را «خوب» می‌نامیم هر گاه جمع هر دو مقسوم‌علیه متمایز آن بر ۷ بخش پذیر باشد. چند عدد خوب کمتر از ۱۰۰ وجود دارد؟

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

۱۲) فرض کنید فهرستی از اعداد طبیعی داده شده است. در هر مرحله می توانیم ۳ عضو متمایز این فهرست را انتخاب کرده و حاصل ضربشان را به فهرست اضافه کنیم تا فهرستی دیگر به دست آوریم. در صورتی که فهرست اولیه ی ما مجموعه ی اعداد اول باشد، کدام یک از اعداد زیر را می توان با انجام تعدادی مرحله به فهرست اضافه کرد؟

الف) ۱۰۰۰ ب) ۳۳۰ ج) ۳۵۰۰۰۰ د) ۳۷۵ ه) ۱۰۵۰۰

۱۳) رستم به فرمان کیکاووس از زابلستان به قصد کشتن دیو چند سر حرکت می کند. اما قبل از نبرد، دیو به او هشدار می دهد که این کار، چندان ساده نیست؛ این دیو چندین سر و هر سر او تعدادی چشم دارد. اگر رستم یک سر n -چشم را ($n > 1$) قطع کند دیو به جای آن، یک سر یک چشم، یک سر دو چشم، ... و یک سر ($n-1$)-چشم در می آورد!



تهمتن چو بشنید گفتار دیو بر آورد چون شیر جنگی غریو

بزد بر سر دیو چون پیل مست سر و مغزش از گرز او گشت پست

اگر دیو ابتدا سه سر، با ۴، ۶، و ۸ چشم داشته باشد رستم چند ضربه برای نابودی کامل دیو باید وارد کند؟

الف) ۱۸ ب) ۶۱ ج) ۱۶۸

د) متأسفانه رستم نمی تواند دیو را از پای در آورد!

ه) رستم دیو را از پای در می آورد اما تعداد ضربات بستگی به روش او دارد.

۱۴) توجه کنید که در این سوال هم مثل همه ی سوال های دیگر امتحان، چهار گزینه غلط و یک گزینه صحیح است!

الف) (ب) صحیح است. ب) (ج) و (د) هر دو غلط اند.

ج) (ج) صحیح است. د) (د) صحیح است.

ه) حداقل یکی از (ج) یا (ه) صحیح اند.

۱۵) یک عدد طبیعی را «تقسیمی» می نامیم هر گاه از قرار گرفتن یک عدد مضرب ۵ در سمت راست یک عدد مضرب ۳ به دست آمده باشد. تعداد اعداد ۴ رقمی مضرب ۵ که تقسیمی نیستند چند تا است؟

- الف) ۵۸۸ (ب) ۲۹۴ (ج) ۸۸۲ (د) ۱۲۰۰ (ه) ۴۳۲

۱۶) در چهارضلعی ABCD داریم زاویه ی $ABC=BDC=90^\circ$ و $AB=CD$. اگر O محل تقاطع AC و BD باشد و $CB=5$ و $BO=3$. طول CO چقدر است؟

- الف) ۴ (ب) $\sqrt{5}$ (ج) $\sqrt{14}$ (د) ۳ (ه) $3\sqrt{2}$

۱۷) دو دایره ی C_1 و C_2 به مراکز O_1 و O_2 در دو نقطه ی A و B متقاطع می باشند. طول خط مرکزین دو دایره برابر ۵ و شعاع های آن ها ۴ و ۳ می باشد. خطی که از نقطه ی A گذشته دو دایره را در نقاط M و N قطع کرده است. اگر اندازه ی وتر AM برابر ۴ باشد، اندازه ی MN کدام است؟

- الف) $4+3\sqrt{3}$ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) $4+3\sqrt{\frac{13}{5}}$ (ه) $4\sqrt{5}$

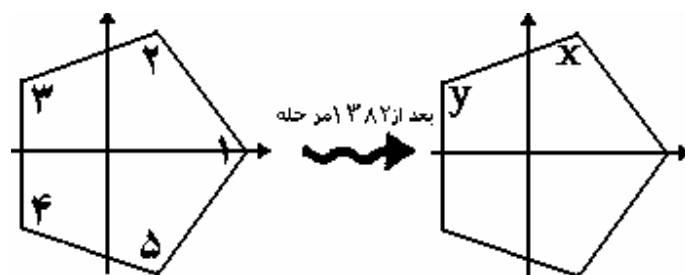
۱۸) یک قورباغه در نقطه ی به مختصات $(0,1)$ از صفحه قرار دارد و هر بار در جهت عمود بر خطی که مبدا مختصات را به مکان فعلی اش وصل می کند (طوری که مبدا در سمت راستش قرار بگیرد) به اندازه ی فاصله ی همان لحظه اش از مبدا، جهش می کند. اگر قورباغه پس از ۱۵ جهش به نقطه ی (a,b) برسد، a چند است؟



- الف) ۰ (ب) ۲۵۶ (ج) $-128\sqrt{2}$ (د) -۲۵۶ (ه) -۱۲۸

۱۹) فرض کنید یک ۵ ضلعی منتظم مانند شکل روی محور های مختصات قرار گرفته است. عمل زیر را روی ۵ ضلعی ۱۳۸۲ بار انجام می دهیم: «نسبت به محور X ها قرینه می کنیم، ۷۲° در جهت خلاف حرکت عقربه ی ساعت دوران می دهیم، دوباره نسبت به محور X ها قرینه می کنیم.»

در این صورت (x,y) چند می باشد؟



(۵،۴) (ه)

(۴،۵) (د)

(۵،۱) (ج)

(۱،۵) (ب)

(۳،۴) (الف)

۲۰) در چهارضلعی محدب ABCD نیمساز زاویه ی ABC ضلع CD را در نقطه ی E قطع کرده است. اگر $\angle AEB = 90^{\circ}$ و $\angle CDA = \angle BCD$ ، کدام یک از احکام زیر همواره برقرار است؟

(الف) ABCD چهارضلعی محیطی است.

(ب) ABCD چهارضلعی محاطی است.

(ج) $AB=AD+BC$

(د) $CD=AD+BC$

(ه) $EA.EB=EC.ED$

۲۱) دستگاه معادلات مقابل در اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$1+a^2+3ab=b^2$$

$$1+a^5=b^5$$

(ه) نامتناهی جواب

(د) ۳

(ج) ۲

(ب) ۱

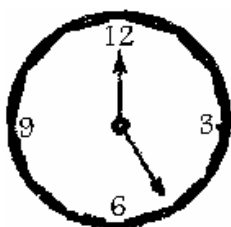
(الف) ۰

۲۲) بیشترین مقدار λ که برای هر $a > 0$ نامساوی زیر برقرار باشد، چند است؟

$$a^3 + \frac{1}{a^3} - 2 \geq \lambda \left(a + \frac{1}{a} - 2 \right)$$

- الف) ۰ ب) ۴ ج) ۹ د) $\frac{50}{4}$ ه) ۶

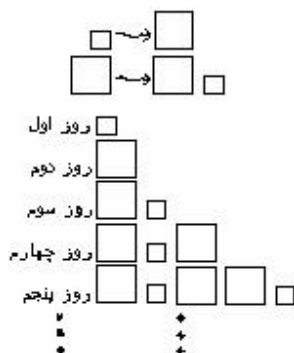
۲۳) ساعتی داریم که طول عقربه ی ساعت شمار و دقیقه شمار آن برابر است. بین ساعت ۵ تا ۶ چند بار ممکن است عقربه ها به گونه ای قرار گیرند که ساعت دقیق مشخص نشود؟ مثلاً در حالت روبرو ساعت حتماً ۵ است، و نمی تواند ۱۲:۲۵ باشد.



- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

۲۴) بر روی یک رشته ی بسیار نازک و دراز تعدادی سلول که بعضی کوچک و بعضی بزرگ هستند پشت سر هم قرار گرفته اند. بعد از گذشتن هر روز سلول های کوچک، بزرگ می شوند و سلول های بزرگ، یک سلول کوچک در سمت راست خود

تولید می کنند.



اگر در روز اول تنها یک سلول کوچک داشته باشیم در روز هزار و سیصد و هشتاد و دوم دنباله ای طویل از سلول ها خواهیم داشت! سه جمله ی وسط این دنباله کدامند؟

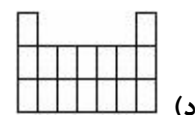
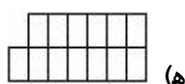
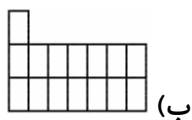
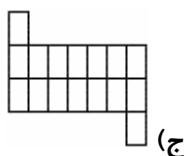
- الف) $\square \square \square$ ب) $\square \square \square$ ج) $\square \square \square$ د) $\square \square \square$

ه) در این روز تعداد زوجی سلول وجود دارد و دنباله، وسط ندارد!

(۲۵) فرض کنید n کوچک ترین عدد طبیعی باشد که $2^n + 3^n$ بر ۱۲۵ بخش پذیر است. مجموع ارقام n چند است؟

الف) ۸ ب) ۷ ج) ۶ د) ۵ ه) اصلاً چنین n ای وجود ندارد.

(۲۶) تعداد زیادی موزاییک 1×2 در اختیار داریم. دو نفر به نوبت روی یک شکل شطرنجی به صورت زیر با هم بازی می کنند. هر نفر در نوبت خود یک موزاییک در دو خانه مجاور از شکل که قبلاً پر نشده باشد قرار می دهد. کسی که در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازنده ی بازی است. در کدام شکل نفر دوم می تواند طوری بازی کند که برنده ی بازی باشد؟ (فرض کنید نفر اول به بهترین صورت بازی می کند.)



(۲۷) خط متغیر D و غیر گذرنده از نقاط B و C همواره دو ضلع AB و AC از مثلث ABC را، به ترتیب، در دو نقطه ی M و N چنان قطع می نماید که مساحت مثلث AMN برابر مجموع مساحت های مثلث های MNB و MNC می باشد. کدام یک از احکام زیر درست است؟

الف) این خط باید همواره با ضلع BC موازی باشد.

$$\frac{AM}{NB} = \frac{AN}{MC} \quad \text{ب)}$$

ج) این خط باید همواره از یک نقطه ی ثابت در صفحه ی مثلث بگذرد.

د) این خط باید همواره از وسط ارتفاع AH بگذرد.

ه) این خط باید همواره بر دایره ی محاطی مثلث مماس باشد.

۲۸) یک عدد طبیعی را «ریشه دار» می‌گوییم هر گاه مجذور مجموع ارقامش با خودش برابر باشد. کدام گزینه درست است؟

الف) تعداد اعداد ریشه دار نامتناهی است.

ب) عدد ریشه دار دو رقمی وجود ندارد.

ج) عدد ریشه دار چهار رقمی وجود ندارد.

د) عدد ریشه داری به شکل $9k+3$ وجود ندارد.

ه) عدد ریشه داری به شکل $9k+4$ وجود ندارد.

۲۹) از نقطه ی P خارج از دایره ی (O) دو قاطع بر دایره رسم می‌کنیم. اولی در A و B و دومی در C و D دایره را قطع می‌کند. از نقطه ی P مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر M وسط کمان AB باشد و MD و MC، به ترتیب، AB را در E و F قطع نمایند و $\angle ETF=70^\circ$ ، $\angle FTP=30^\circ$ آن گاه زاویه ی TPE چقدر است؟

الف) 60° (ب) 30° (ج) 45° (د) 50° (ه) 75°

۳۰) در مثلث ABC، طول میانه ی راس B، ۳ است و $A=150^\circ$. طول میانه ی راس A حداقل چقدر است؟

الف) ۱ (ب) $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ (ج) $\frac{3}{2}(3-\sqrt{7})$ (د) ۲ (ه) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$