

مرحله ی اول بیستمین دوره ی المپیاد ریاضی ایران

بهمن ماه ۱۳۸۰

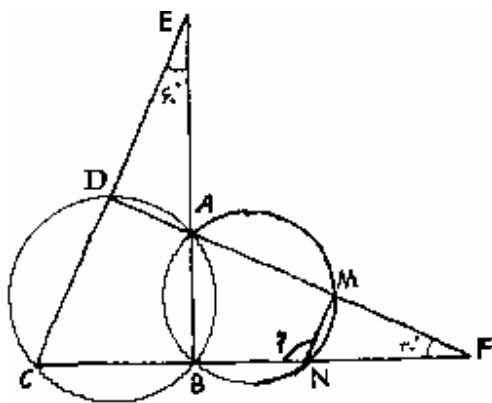
(۱) به ازای چند عدد طبیعی n ، $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ مربع کامل است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۳ د) ۶ ه) بی نهایت

(۲) به ازای چند عدد طبیعی n معادله ی $n^a + n^b + n^c = n^d$ در اعداد طبیعی جواب دارد؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی نهایت

(۳) در چهارضلعی محاطی $ABCD$ ، E و F به ترتیب محل برخورد AB با CD و AD با BC می باشند. دایره ای دلخواه از A و B می گذرانیم تا AF و BF را به ترتیب در M و N قطع کند اگر $\angle AFB = 30^\circ$ و $\angle AED = 60^\circ$ ، آن گاه $\angle MNB$ برابر است با:

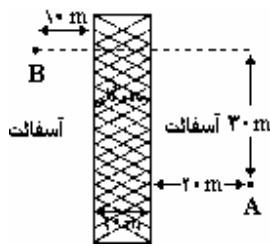


الف) 90° ب) 120° ج) 135°

د) 105° ه) 150°

(۴) مطابق شکل مقابل، یک دونه در نقطه ی A قرار دارد و می خواهد در کم ترین زمان ممکن خود را به B برساند.

در مسیر حرکت او یک جاده ی گلی وجود دارد که باعث می شود سرعت حرکتش حین گذر از آن به نصف کاهش یابد. سرعت حرکت دونه روی آسفالت ۱۰ متر بر ثانیه است. کم ترین زمان ممکن را پیدا کنید.



الف) $\sqrt{26}$ ثانیه (ب) $\sqrt{20}$ ثانیه (ج) ۵ ثانیه

د) $\sqrt{30}$ ثانیه (ه) $\sqrt{24}$ ثانیه

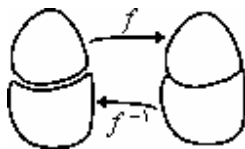
۵) با رقم های ۱ و ۲ حداکثر چند عدد پنج رقمی می توان نوشت، طوری که هر دو عدد حداقل در دو رقم اختلاف داشته باشند؟

الف) ۱۶ (ب) ۱۷ (ج) ۱۸ (د) ۱۹ (ه) ۲۰

۶) a و b دو عدد حقیقی مثبت و متمایز هستند، به طوری که $a = 1 + \sqrt[3]{6a - 2}$ و $b = 1 + \sqrt[3]{6b - 2}$ ab برابر با چه مقداری است؟

الف) $\sqrt[3]{6}$ (ب) ۴ (ج) ۱ (د) ۲ (ه) $\sqrt{2}$

۷) یک « تبدیل پیوسته » تبدیلی است که نقاطی که قبل از تبدیل نزدیک به هم هستند، بعد از تبدیل نیز نزدیک به هم بمانند. تبدیل f بین دو تکه خمیر را این طور در نظر می گیریم که لبه های دو تکه خمیر را به هم می چسبانند و لذا تبدیل وارون آن، یعنی f^{-1} ، تکه خمیر بزرگ تر را به دو تکه خمیر جدا از هم تقسیم می کند.



در این صورت:

الف) f و f^{-1} هر دو پیوسته اند.

ب) f و f^{-1} هیچ کدام پیوسته نیستند.

ج) f پیوسته است ولی f^{-1} پیوسته نیست.

د) f پیوسته نیست ولی f^{-1} پیوسته است.

ه) هیچ کدام از نتیجه گیری های فوق، درست نیست.

۸) اگر شکل A با تبدیلی پیوسته که وارون آن هم پیوسته است (در سؤال قبل تعریف شده است) قابل تبدیل به شکل B باشد، می‌گوییم این دو شکل «هم ریخت» هستند، اجسام زیر را در نظر بگیرید.



(فرض کنید A و B از سیم نرم ساخته شده‌اند و C و D نیز از خمیر ساخته شده‌اند).

کدام گزینه درست است؟

الف) A و B هم ریخت‌اند ولی C و D هم ریخت نیستند.

ب) A و B هم ریخت‌اند و C و D نیز هم ریختند.

ج) A و B هم ریخت نیستند ولی C و D هم ریختند.

د) A و B هم ریخت نیستند و C و D نیز هم ریخت نیستند.

ه) هیچ کدام از نتیجه‌گیری‌های فوق درست نیست.

۹) یک ساعت عقربه‌ای جادویی در اختیار داریم. این ساعت دارای یک خط طلایی است که شماره‌ی ۳ را به ۹ وصل کرده است. این ساعت ویژگی جالبی دارد و آن این است که هر گاه خط طلایی نیم‌ساز داخلی دو عقربه‌ی ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار شود، ساعت زنگ می‌زند. در حال حاضر ساعت ۱:۱۲ ظهر می‌باشد، تا ساعت ۱:۱۲ شب ساعت چند بار زنگ می‌زند؟



الف) ۶

ب) ۹

ج) ۱۱

د) ۱۲

ه) ۱۳

۱۰) در دبیرستان پسرانه‌ی ابن سینا تعدادی دانش‌آموز تحصیل می‌کنند. اگر دو دانش‌آموز از این مدرسه دوست باشند، پدرهای این دو دانش‌آموز نیز با هم دوست هستند (دوستی یک رابطه‌ی دو طرفه است و هیچ‌کس با خودش دوست نیست!). کدام گزینه قطعاً درست است؟

الف) اگر حامد (یکی از دانش‌آموزان مدرسه) دوست در دبیرستان داشته باشد، آن‌گاه ابو حامد (پدر حامد) حداقل k دوست در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان دارد.

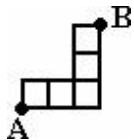
ب) اگر حامد k دوست در دبیرستان داشته باشد، آن‌گاه ابو حامد حداکثر k دوست در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان دارد.

ج) اگر k دانش آموز از دبیرستان موجود باشند که هیچ دو تایی از آن ها دوست نباشند، آن گاه در میان پدر های دانش آموزان دبیرستان k نفر وجود دارند که هیچ دو تایی دوست نیستند.

د) اگر در میان پدر های دانش آموزان دبیرستان k نفر موجود باشند که هیچ دو تایی دوست نباشند، آن گاه k دانش آموز وجود دارند که هیچ دو تایی دوست نیستند.

ه) اگر حسام برادر کوچک تر حامد باشد، آن گاه حسام و حامد با هم دوست هستند (حسام و حامد هر دو در دبیرستان ابن سینا تحصیل می کنند).

۱۱) یک متحرک در نقطه ی A از شکل زیر قرار دارد. این متحرک می خواهد خود را به نقطه ی B برساند. متحرک می تواند روی خطوط شبکه حرکت کند و از هیچ نقطه ای نباید دو بار عبور کند. این متحرک به چند طریق می تواند خود را به B برساند؟



الف) ۲۴ ب) ۲۸ ج) ۳۲ د) ۳۶ ه) ۴۰

۱۲) سه دایره ی C_1 ، C_2 و C_3 به شعاع ۵ و به مراکز O_1 ، O_2 و O_3 طوری در صفحه قرار گرفته اند که $O_1O_2=6$ ، $O_1O_3=8$ و $O_2O_3=۸$ بر O_1O_3 عمود است. مساحت ناحیه ای از C_1 که با C_2 و C_3 تداخل ندارد، چقدر است؟

الف) ۱۰π ب) ۱۲π ج) ۲۴ د) ۴۸ ه) ۵۴

۱۳) یک صفحه ی بی نهایت در بی نهایت داریم که خانه های آن را به صورت شطرنجی، سیاه و سفید رنگ کرده ایم. شعاع دایره ای که همه ی نقاط محیط آن شطرنجی ۱ واحد است.

الف) $\sqrt{۵}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ د) $\frac{۳}{۲}$ ه) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۱۴) عدد حقیقی x را « جالب » می گوئیم اگر در بسط اعشاری آن، بعد از ممیز، هر عدد طبیعی ظاهر شده باشد. مثلاً عدد $۰.۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲...$ که از پشت سر هم قرار گرفتن همه ی اعداد طبیعی به وجود آمده، عددی جالب است. کدام یک از گزاره های زیر درباره ی اعداد جالب صحیح نیست؟

الف) در بسط اعشاری هر عدد جالب نامتناهی بار 1380 ظاهر می شود.

ب) هر عدد جالب گنگ است.

ج) اگر x و y دو عدد جالب باشند، $\frac{1}{x}$ و xy هم جالب هستند.

د) اگر x جالب باشد، عدد y هم که از حذف ارقام x به صورت یکی در میان به دست می آید، جالب است.

ه) اگر x جالب باشد، $1-x$ هم جالب است.

۱۵) فرض کنید ΔABC مثلثی در صفحه ی مختصات باشد که مختصات رؤوس آن $A=(x_1, y_1)$ ، $B=(x_2, y_2)$ و $C=(x_3, y_3)$

باشد. در این صورت مساحت مثلث ΔABC از رابطه ی $\frac{1}{2} |y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)|$ به دست می آید منظور از نقاط شبکه ای، نقاطی از صفحه ی مختصات است که مختصات آن ها صحیح است.

الف) در صفحه می توان مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۵ با رؤوس شبکه ای رسم کرد.

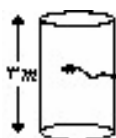
ب) یک مربع 3×3 را می توان به ۲۰ مثلث با رؤوس شبکه ای افراز کرد.

ج) نقطه ای شبکه ای درون متوازی الاضلاعی با مختصات رؤوس $(0,0)$ ، $(1,1)$ ، $(1,0)$ و $(0,1)$ وجود دارد.

د) مساحت هر متوازی الاضلاع با رؤوس شبکه ای صحیح است.

ه) یک مستطیل 4×7 را می توان به ۲۰ متوازی الاضلاع و ۲۰ مثلث با رؤوس شبکه ای افراز کرد.

۱۶) حشره ای را با نخی به طول ۱ متر به وسط یک استوانه ی به ارتفاع ۳ متر و محیط قاعده ی $\sqrt{2}$ متر، از بیرون بسته ایم! مساحت قسمتی از استوانه که حشره می تواند به آن برود، چقدر است؟

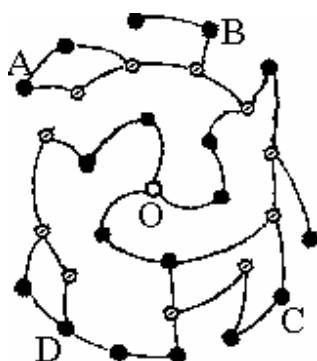


$$\frac{2}{3}\pi + \sqrt{2} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{ب}) \quad \pi$$

$$2\sqrt{2} \quad (\text{ه}) \quad \pi + \sqrt{2} \quad (\text{د})$$

۱۷) آرش و علی روی شکل زیر با یک مهره مشغول بازی هستند، هر کس در نوبت خود می تواند یکی از دو کار زیر را انجام دهد.



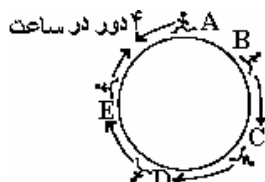
- مهره را روی یال ها در جهت ساعت گرد هر تعداد خانه که بخواهد حرکت دهد.

- مهره را روی یال متصل به رأس مجاور که در لایه ی درونی است (در صورت وجود چنین رأسی) حرکت دهد (رؤوس هم لایه شبیه هم هستند).

هر کس مهره را به خانه ی مرکزی (O) برساند، برنده ی بازی است. فرض کنید آرش بازی را شروع کند و هیچ کس دچار اشتباه نشود. با آغاز از کدام خانه آرش برنده بازی خواهد بود؟

الف) A و B ب) C و D ج) A و D د) C و A ه) B و D

۱۸) در یک پیست دو میدانی دایره وار پنج دوندۀ A، B، C، D، و E به فاصله های مساوی روی پیست قرار گرفته اند (مانند شکل) و چوبی در دست دوندۀ A قرار دارد. بعد از شروع مسابقه، دوندۀ A با سرعت ۴ دور بر ساعت (یعنی در هر ساعت چهار بار دور پیست را طی میکند) در جهت خلاف عقربه های ساعت و دوندۀ B، C، D و E با سرعت ۱ دور در ساعت در جهت عقربه های ساعت شروع به حرکت می کنند. در ضمن در هر زمان که دو دوندۀ از کنار هم عبور می کنند و چوب در دست یکی از آن ها باشد، آن را به دیگری می دهد. بعد از گذشت ۱ ساعت چوب در دست کدام دوندۀ است؟



الف) A ب) B ج) C د) D ه) E

۱۹) اتومبیلی از شهر A به سمت شهر B در حرکت است و فاصله ی دو شهر ۱۰۰ کیلومتر است. حرکت اتومبیل این گونه است که وقتی در x کیلومتری شهر B قرار دارد با سرعت x کیلومتر بر ساعت در حرکت است. کدام گزینه درست است؟

الف) اتومبیل قبل از نیم ساعت ۵۰ کیلومتر اول را طی می کند.

ب) زمانی که اتومبیل ۵۰ کیلومتر آخر را طی می کند کم تر از ۲ ساعت است.

ج) زمانی که اتومبیل ۲۵ کیلومتر آخر را طی می کند کم تر از ۱ ساعت است.

د) زمان طی کردن ۲۵ کیلومتر سوم بیش تر از ۱ ساعت است.

ه) اتومبیل هیچ گاه به مقصد نمی رسد!

۲۰) می‌گوییم زیرمجموعه‌ی A از صفحه «ساختار دایره‌ای» دارد، اگر برای هر $x \in A$ ، دایره‌ی توپری به مرکز x وجود داشته باشد که کاملاً در A قرار بگیرد؛ به طور مشابه، می‌گوییم B «ساختار مثلثی» دارد هر گاه برای هر $x \in B$ ، مثلث متساوی‌الاضلاع توپری به مرکز ثقل x داخل B وجود داشته باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح نیست؟

الف) دایره‌ی واحد، $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\}$ ساختار مثلثی دارد.

ب) نیم صفحه‌ی $H = \{(x,y) | y > 0\}$ ساختار دایره‌ای دارد.

ج) هر مجموعه‌ای که ساختار دایره‌ای داشته باشد، ساختار مثلثی دارد.

د) هر مجموعه‌ای که ساختار مثلثی داشته باشد، ساختار دایره‌ای دارد.

ه) می‌توان صفحه را به دو زیرمجموعه‌ی ناتهی‌طوری تقسیم کرد که یکی ساختار دایره‌ای و دیگری ساختار مثلثی داشته باشد.

۲۱) در مثلث $\triangle ABC$ نقاط P و Q درون مثلث، دارای این خاصیت اند که

$$S(\triangle PAC) = \frac{1}{3} S(\triangle PAB) = \frac{1}{3} S(\triangle PBC)$$

$$S(\triangle QAB) = \frac{1}{3} S(\triangle QBC) = \frac{1}{3} S(\triangle QAC)$$

اگر پاره خط PQ ضلع AB را در F قطع کند، مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{AF}{FB}$ (منظور از $S(\triangle XYZ)$ مساحت مثلث $\triangle XYZ$ است).

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۲۲) حداکثر چند عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 30\}$ می‌توان انتخاب کرد که هیچ کدام از آن‌ها حاصل ضرب بقیه‌شان را عاد نکند؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۱ ه) ۱۲

توجه: بارم سؤال های ۲۳ الی ۳۰ دو برابر بارم بقیه ی سؤال ها ست.

(در نظر داشته باشید که نمره ی منفی این سؤال ها طبق همین قاعده محاسبه می شود).

در سه سؤال بعد منظور از « نقطه » عضوی از مجموعه ی Z^2 است، یعنی (m,n) هایی که m و n اعدادی صحیح هستند. زیرمجموعه ی A از Z^2 را « خط » می نامیم اگر اولاً ناتهی باشد، ثانیاً اعداد صحیح a, b و c وجود داشته باشد که $a^2 + b^2 \neq 0$

و $A = \{(m,n) \in Z^2 \mid am + bn = c\}$. می گوییم دو خط A و B موازی اند، اگر $A \cap B = \emptyset$ یا $A=B$. اگر O یک نقطه و r یک عدد حقیقی نامنفی باشد، منظور از دایره ی به مرکز O و شعاع r مجموعه ی نقاطی است که فاصله شان تا O برابر r است. خط A را بر دایره ی C مماس می گوییم، اگر $A \cap C$ تک عضوی باشد.

۲۳) کدام یک از عبارات های زیر درست است؟

۱- از هر دو نقطه متمایز دقیقاً یک خط می گذرد.

۲- اگر x نقطه ای خارج از خط A باشد، دقیقاً یک خط وجود دارد که از x می گذرد و موازی A است.

۳- اگر A موازی B و B موازی C باشد، آن گاه A موازی C است.

۴- مجموعه ی نقاطی که از دو نقطه ی متمایز به یک فاصله اند، یک خط است.

الف) ۱، ۲ و ۳ (ب) ۱ (ج) ۲، ۳ و ۴ (د) ۳ و ۴ (ه) همه ی عبارات

۲۴) کدام یک از مقادیر زیر می توانند تعداد نقاط یک دایره باشند؟

الف) ۷ (ب) ۱۰ (ج) ۱۲ (د) بی نهایت (ه) ب و ج

۲۵) با توجه به تعریف های بالا کدام گزینه درست است؟

الف) از هر نقطه خارج یک دایره دقیقاً دو مماس بر دایره می توان رسم کرد.

ب) از هر نقطه روی دایره بی نهایت مماس بر دایره می توان رسم کرد.

ج) دو دایره متمایز حداکثر ۴ مماس مشترک دارد.

د) از هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط یک دایره می گذرد.

ه) با زیاد شدن شعاع، تعداد نقاط روی دایره افزایش می یابد.

(۲۶) ۱۷۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، بزرگ ترین گردهمایی نقاشان برجسته در شهر بلاف بلوف افتتاح شده. صد ها نفر از همه ی نقاط راه شیری جمع شده بودند. برای مراسم افتتاحیه، سرگرمی ای تدارک دیده شده بود که به این صورت اجرا می شد:

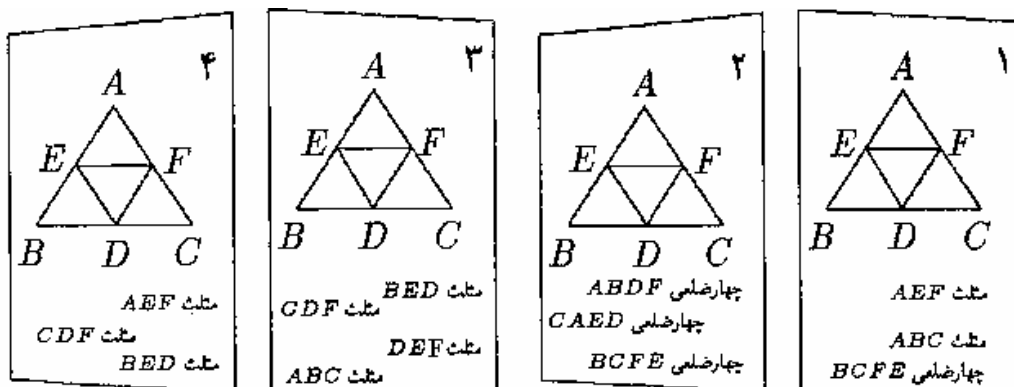
ابتدا یک نفر، یک « شکل » دلخواه روی تابلو می کشید. منظور از « شکل » همه ی نقاط درون و روی یک منحنی بسته است (که خودش را قطع نکند). سپس نفر دوم باید شکلی روی همان تابلو بکشد که حتما شامل تعدادی نقطه ی جدید بشود (این شکل ممکن است با شکل های قبلی اشتراک داشته باشد یا نداشته باشد). به همین ترتیب هر کس به نوبت باید شکلی بکشد که شامل تعدادی نقطه ی جدید (نقاطی که در هیچ یک از شکل های قبلی نیامده باشد) بشود. زیر تابلو، شکل های شکیده شده در آن- بدون این که ترتیب کشیده شدن آن ها ذکر شود- نام برده می شود.



ممکن است کسی از روی خط های شکل های قبلی دوباره بکشد. ولی هیچگاه دو شکل بر هم منطبق نداریم. مثلا تابلوی روبرو توسط چهار نقاش بزرگ کشیده شد و در پایان مراسم به قیمت ۱۰۰۰۰۰ بلوفی (واحد پول بلاف بلوف) به فروش رفت. در ابتدا، امین مثلث $\triangle DEF$ را کشید، بعد سیامک چهارضلعی $BEFC$ را کشید، پس از آن احسان مثلث $\triangle ABC$ را کشید و در نهایت ایمان منحنی G را رسم کرد.

توجه کنید که ترتیب نقاشی مهم است. مثلا امکان نداشت اول احسان مثلث $\triangle ABC$ را بکشد و بعد سیامک بخواند چهارضلعی $BEFC$ را بکشد. چون در آن صورت شکل سیامک نقطه ی جدیدی نسبت به نقاط قبلی نداشت. بعد ها در تاریخ هر n شکل که امکان داشته باشد در این مراسم کشیده شده باشند، یک مَنگول نامیده شد! حمید ادعا می کد تابلو های زیر را در پایان همان مراسم خریداری کرده است. کدام تابلو ها قطعا تقلبی اند؟ (به عبارت دیگر کدام ها مَنگول نیستند؟)

الف) ۱ و ۲ ب) ۱ و ۳ ج) ۱ و ۴ د) ۲ و ۳ ه) ۲ و ۴



۲۷) مردی راست گو از فرامفیا آمده است و اصوات نامفهومی از دهانش خارج می شود. مترجم او می گوید:

« من درست نمی فهمم چه می گوید، ولی مطمئنم منظور او یکی از این جملات است:

۱) تابلوی من شامل تعدادی شکل است که همگی با انتقال از روی یکدیگر به دست می آیند.

۲) تابلوی من شامل تعدادی شکل هم نهشت است (شکل های قابل انطباق با هم).

۳) تابلوی من شامل تعدادی دایره است.

۴) در تابلوی من شکلی هست که زیرمجموعه ی اجتماع بقیه ی شکل ها نیست. »

اگر کدام جمله را گفته باشد می توان مطمئن بود که این تابلو مَنگول است؟

الف) ۲ و ۱ ب) ۳ و ۱ ج) ۴ و ۱ د) ۳ و ۲ ه) ۴ و ۲

۲۸) دو نفر از برگزار کنندگان مراسم تصمیم می گیرند با یکی از مهمان خارجی - و نا آشنا به قوانین - شوخی کنند. به همین دلیل وقتی نحوه ی کشیده شدن تابلو ها را توضیح می دادند، ترتیب کشیده شدن را معکوس می گفتند (مثلا اگر به ترتیب شکل های $F_1, F_2, \dots, F_n$ کشیده شده بود، به او می گفتند: ابتدا شکل F_n رسم شده، بعد شکل F_{n-1} ، ...، و در نهایت شکل F_1). برای این که همه ی تابلو ها را به این شکل توضیح بدهند و قضیه لو نرود، آن ها باید قانونِ سرگرمی را به چه صورت برای مهمانان خارجی بیان کنند؟

الف) هر کس باید شکلی بکشد که شامل تعدادی نقطه ی جدید بشود (نقاطی که در شکل های قبل نیامده)

ب) هر کس باید شکلی بکشد که شامل کل نقاط یکی از شکل های قبلی نشود.

ج) هر کس باید شکلی بکشد که زیرمجموعه ی اجتماع شکل های قبلی باشد.

د) هر کس باید شکلی بکشد که از اجتماع آن با k تا از شکل های قبل، اجتماع $k+1$ تا از شکل های قبلی پوشانده نشود.

ه) هیچ کدام

(ه) یاسر می تواند همیشه برنده شود.