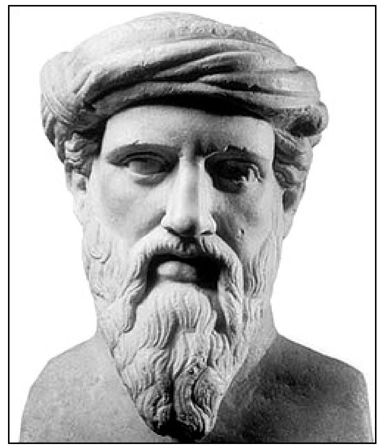
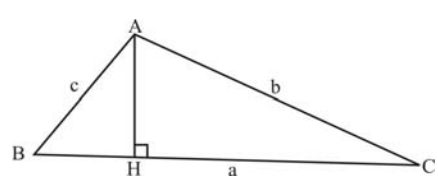
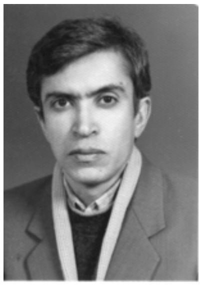
رابطه فیثاغورث، رابطه کسینوس‌ها و یک نتیجه جالب دیگر



برای همه دانش‌آموزانی که با گزاره فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه آشنا هستند، درک رابطه کسینوس‌ها در مثلث بسیار ساده و ثمربخش است. چون با دو بار به کار گیری رابطه فیثاغورث در دو مثلث ABH و ACH و این که در هر مثلث قائم‌الزاویه کسینوس هر زاویه برابر است با نسبت اندازه ضلع مجاور آن زاویه به اندازه وتر، رابطه‌های طولی زیر در هر مثلث نامشخص به دست می‌آید:





بهمن اصلاح‌پذیر متولد ۱۳۲۸ بوده و تحصیلات عالیه خود را با درجه کارشناسی ازدانشگاه تهران به اتمام رسانده است. نامبرده از سال ۱۳۵۷ به کار تدریس پرداخته و از نخستین دبیران درس هندسه دبیرستان علامه حلی (سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان) بوده است. وی همچنین ضمن همکاری با دفتر تألیف کتب ریاضی دبیرستان، یکی از مؤلفین کتاب هندسه ۲ نظام جدید آموزشی بوده‌اند و نیز از اعضای کمیته المپیاد ریاضی باشگاه دانش پژوهان جوان و از مدرسین این مرکز هستند. بهمن اصلاح پذیر تا کنون بیش از هفت جلد کتاب در زمینه ریاضیات (و به خصوص هندسه) تألیف و ترجمه نموده و با بسیاری از مدارس نمونه شهر تهران همکاری داشته است و نیز در چهل و هفتمین المپیاد ریاضی در کشور اسلوونی جزء سرپرستان تیم اعزامی جمهوری اسلامی ایران بودند.

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}}$$

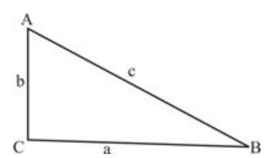
به عنوان مثال، اثبات یکی ازاین دستورها در زیر می‌آید. با فرض حاده بودن $\widehat{B}$ می‌توان نوشت:

$$b^2 = CH^2 + AH^2$$
$$c^2 = BH^2 + AH^2 \rightarrow b^2 - c^2 = CH^2 - BH^2$$
$$b^2 - c^2 = (CH + BH)(CH - BH)$$

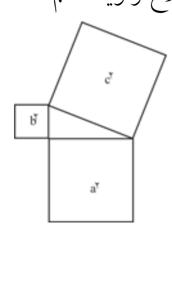
$$b^2 - c^2 = a(CH - BH)$$
$$b^2 - c^2 = a(a - BH - BH)$$
$$b^2 - c^2 = a(a - 2BH)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.BH$$
$$\cos B = \frac{BH}{AB}$$
$$\cos B = \frac{BH}{c} \to BH = c\cos B$$
$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$$

(اگر $\hat{B}$ منفرجه باشد، نیز همین حکم برقرار است. سعی کنید خودتان آن را اثبات کنید.)

همه دانش‌آموزان سال دوم متوسطه و تا حدودی تمام دانش‌آموزان دوره راهنمایی با فرمول فیثاغورث درباره مثلث قائم‌الزاویه آشنا هستند که $c^2 = a^2 + b^2$



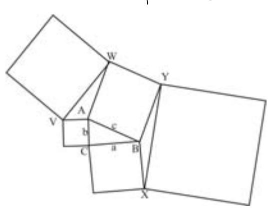
که بنابر گزاره فوق یک شکل هندسی هم براساس مساحت مربع‌هایی که روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شود می‌توان طراحی کرد و بیان گزاره فیثاغورث بدین صورت درمی‌آید که مساحت مربعی که روی وتر ساخته می‌شود برابر است با مجموع مساحت مربع‌هایی که روی اضلاع زاویه قائم ساخته می‌شود.



ولی یک سؤال جالب و هندسی به صورت زیر می‌توان طرح کرد که مفهوم $a^2 - b^2 = ?$ چیست؟

خوانندگان عزیز لازم است که یک بار سعی کنید که به سؤال فوق پاسخ دهید و یک طرح و شکل هندسی برای حل آن ارائه دهید. پاسخ سؤال فوق با توجه به قانون کسینوس‌ها به شرح زیر است:

مربع‌هایی روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ABC و روی پاره‌خط‌های VW و XY می‌سازیم.



$$XY^2 - VW^2 = (a^2 + c^2 - 2ac\cos X\hat{B}Y)$$
$$-(b^2 + c^2 - 2bc\cos V\hat{A}W)$$
$$= a^2 - b^2 + 2ac\cos A\hat{B}C - 2bc\cos B\hat{A}C$$
$$= a^2 - b^2 + 2ac\frac{a}{c} - 2bc\frac{b}{c} = 3(a^2 - b^2)$$

(توجه کنید که:

$V\hat{A}W + B\hat{A}C = 180^\circ$ و $X\hat{B}Y + A\hat{B}C = 180^\circ$

(چرا؟) و $\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$) بنابراین:

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{3}\left[(\text{مساحت مربع به ضلع } XY) - (\text{مساحت مربع به ضلع } VW)\right]$$

آیا این نتیجه برای مثلث غیر قائم‌الزاویه هم صادق است؟

خوانندگان گرامی سعی نمایید که این مسئله را خودتان حل کنید.